ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von G. HAMEL-CHARLOTTENBURG, R. MOLLIER-DRESDEN, H. MÜLLER-BRESLAU-CHARLOTTENBURG, L. PRANDTL-GÖTTINGEN und R. RÜDENBERG-BERLIN

:: Band 4 :: Oktober 1924

:: Heft 5 :: Seite 361 bis 448

I N H A L T:



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN SW 19

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 4 Ende Oktober 1924 Heft 5

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern.

Von **A. TIMPE** in Berlin.

Die Bedeutung des Studiums der achsensymmetrischen Verzerrung von Umdrehungskörpern für praktische Anwendungen im Bau- und Maschinenwesen ist von A. und L. Föppl im siebenten Abschnitt ihres Werkes »Drang und Zwang« [1]) sehr gründlich herausgearbeitet worden, unter Hinweis auf verschiedene interessante, noch ungelöste Probleme. Für die mathematische Behandlung dieses Gegenstandes sind, außer der allgemeinen Theorie der Umdrehungskörper von Wangerin [2]), verschiedene Formelapparate entwickelt worden von J. H. Michell [3]), A. E. H. Love [4]), A. und L. Föppl [5]) und R. Serini [6]). Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich, in Anknüpfung an Ergebnisse einer früheren, der Torsion von Umdrehungskörpern gewidmeten Arbeit des Verfassers [7]) und an die Serinische Darstellung, mit einer zweckmäßigen Gestaltung der Formelgrundlage in cartesischen und krummlinigen Koordinaten und Anwendungen auf Kreis- und Kreisringplatte, Zylinder und Sphäroid. Für Kreis- und Kreisringplatte ergibt sich eine sehr erwünschte Handhabe zur kritischen Betrachtung der Grundlagen und Folgerungen der üblichen Näherungstheorie.

1. Die Elastizitätsgleichungen in Zylinderkoordinaten. Bei Anwendung von Zylinderkoordinaten r, ϑ, z schreiben sich die Gleichungen des elastischen Gleichgewichts bei fehlender Massenkraft für den Fall, daß alle Spannungen und Verschiebungen von

[1]) München und Berlin 1920, R. Oldenbourg.
[2]) Archiv f. Math. 55 (1873).
[3]) Lond. Math. Soc. Proc. 31 (1900), S. 144.
[4]) Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe, S. 314.
[5]) a. a. O.
[6]) Atti R. Acc. Lincei (5) 28 (1919), 2 s, S. 343.
[7]) Math. Ann. 71 (1911), S. 480. Die grundlegenden Ansätze dieser Abhandlung, die Pöschl in seinem zusammenfassenden Bericht über Torsion nicht erwähnt, spielen bei L. Föppl, dem diese Abhandlung einer persönlichen Mitteilung zufolge nicht bekannt gewesen, in seinem in den »Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss.« 1921 erschienenen Aufsatz »Die Torsion runder Stäbe von veränderlichem Querschnitt« eine wichtige Rolle und dienen ihm u. a. als Ausgangspunkt für die Herleitung einzelner schon von mir mitgeteilter Ergebnisse.

der Winkelkoordinate ϑ unabhängig sind und die zur Meridianebene senkrechte Verschiebungskomponente u_ϑ verschwindet, folgendermaßen [1]):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Hierin bedeuten σ_r, σ_ϑ, σ_z die Normalspannungen, τ_{rz} die einzige nicht verschwindende Gleitspannung, für die wir also einfach τ schreiben wollen. Mit den Verzerrungskomponenten ε_r, ε_ϑ, ε_z, γ_{rz} sind diese Größen durch folgende Formeln verknüpft:

$$\sigma_r = \lambda \Delta + 2 \mu \varepsilon_r, \quad \sigma_\vartheta = \lambda \Delta + 2 \mu \varepsilon_\vartheta, \quad \sigma_z = \lambda \Delta + 2 \mu \varepsilon_z; \quad \tau = \mu \gamma_{rz} \quad . \quad . \quad (2),$$

wo $\Delta = \varepsilon_r + \varepsilon_\vartheta + \varepsilon_z$ und λ, μ die Laméschen Elastizitätskonstanten. Für die einzige nicht verschwindende Drehungskomponente $\tilde{\omega}_\vartheta$ schreiben wir einfach $\tilde{\omega}$ und haben:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ &\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad 2 \tilde{\omega} = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (3),$$

wo u_r, u_z die Verschiebungskomponenten. Unter Benutzung der Formeln (2) und (3) gehen die Gleichungen (1) über in [1])

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{2 \mu}{\lambda + 2 \mu} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2 \mu}{\lambda + 2 \mu} \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tilde{\omega})}{\partial r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Diese Gleichungen sind die Grundlagen eines hydrodynamischen Gleichnisses: Δ und $\frac{\mu}{\lambda + 2 \mu} 2 r \tilde{\omega}$ besitzen die Eigenschaften [2]) einer achsensymmetrischen Potentialfunktion φ und der dazu assoziierten Strömungsfunktion ψ. Aus den Verknüpfungsformeln $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ folgt, daß φ und ψ den Differentialgleichungen

$$\Gamma \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

(übrigens, da $\Gamma \psi = \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, auch $\Gamma \Gamma \psi = 0$) genügen. Andererseits zeigen die Verknüpfungsformeln, als Integrabilitätsbedingungen gelesen, daß φ und ψ sich wiederum aus einer achsensymmetrischen Potentialfunktion φ_1 und der assoziierten Strömungsfunktion ψ_1 herleiten lassen müssen durch den Ansatz

$$\varphi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}; \quad \psi = -r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Die Wiederholung der Betrachtung ergibt, daß φ_1 und ψ_1 nach dem Schema (6) durch zwei entsprechende Funktionen φ_2, ψ_2 erzeugt werden können. Es gibt also eine ganze Folge von erzeugenden Funktionen φ_n, ψ_n, die den Gleichungen (5) genügen und nach dem Schema (6) aus einander hervorgehen.

Unter Berücksichtigung dieser Zusammenhänge gelangen wir bei Einführung einer beliebigen achsensymmetrischen harmonischen Funktion $f(r, z)$ zu folgender, leicht zu verifizierender Lösungsdarstellung für die achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern:

$$u_r = \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\lambda + \mu}{2 \mu} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\lambda + 2 \mu}{\mu} \frac{\psi_1}{r}, \quad u_z = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\lambda + \mu}{2 \mu} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

die für Δ und $\frac{\mu}{\lambda + 2 \mu} 2 \tilde{\omega}$ die assoziierten Funktionen φ und ψ liefert. Sie bietet ein bequemes Hilfsmittel zur Gewinnung partikulärer Lösungen und läßt sich mit $\psi_1 = \frac{\partial \psi_2}{\partial z}$ in die von Love, Elastizität, S. 316, für U und w gewonnene Darstellung und ebenso in die von Serini abgeleiteten Formeln (21) [3]) überführen, entspricht übrigens genau der

[1]) Vgl. A. E. H. Love, Elastizität, S. 169.

[2]) E. Beltrami, Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse, Opere t. III; A. Timpe, a. a. O.; R. Serini, a. a. O.

[3]) In der Formel für w muß das Minuszeichen des ersten Gliedes in ein Pluszeichen verbessert werden.

bei ebener Verzerrung für die rechtwinkligen Verschiebungskomponenten u, v geltenden Lösungsdarstellung [1])

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\lambda + \mu}{2\,\mu\,(\lambda + 2\,\mu)} \frac{\partial}{\partial x}(y\,\eta) + \frac{\xi}{2\,\mu},\quad v = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\lambda + \mu}{2\,\mu\,(\lambda + \mu)} \frac{\partial}{\partial y}(y\,\eta) + \frac{\eta}{2\,\mu},$$

in der f eine ebene harmonische Funktion, ξ, η konjugierte harmonische Funktionen bedeuten.

2. Vollzylinder und Kreisplatte. Die Polynomlösungen der Laplaceschen Gleichung $\nabla \Phi = 0$ stellen sich dar in der Form $\Phi = (r^2 + z^2)^{n + 1/2} \frac{\partial^n}{\partial z^n} (r^2 + z^2)^{-1/2}$, wo n eine beliebige positive ganze Zahl. Ganze rationale Strömungsfunktionen gewinnt man hieraus durch den Ansatz $\Psi = - r \frac{\partial \Phi}{\partial r}$, oder auch [2]) nach der Formel $\Psi = (r^2 + z^2)^{n - 1/2} \frac{\partial^n}{\partial z^n} (r^2 + z^2)^{1/2}$. Führt man diese Ausdrücke mit einem Multiplikator A_n bezw. B_n in (7) für f bezw. ψ_1 ein, so ergeben sich unter Berücksichtigung von (2), (3) folgende partikuläre Lösungen:

1) $n = 1$; $f = A_1 z$, $\psi_1 = 0$. — $u_r = 0$; $u_z = A_1$: gleichmäßige Verschiebung in der z-Richtung.

2) $n = 2$; $f = {}^1/_2\, A_2 (2 z^2 - r^2)$, $\psi_1 = B_2 r^2$. — $u_r = (- A_2 + B_2)\, r$; $u_z = 2\, A_2\, z$;
$\sigma_r = \sigma_\vartheta = - 2\, A_2\, \mu + 2\, B_2 (\lambda + \mu)$; $\sigma_z = 4\, A_2\, \mu + 2\, B_2\, \lambda$; $\tau = 0$.

Beispiel 2a: $A_2 = - {}^1/_2 \frac{\lambda}{\mu} B_2$: $\sigma_z = 0$: gleichförmig in ihrer Ebene gereckte Kreisplatte.

Beispiel 2b: $A_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} B_2$; $\sigma_r = \sigma_\vartheta = 0$: gleichmäßiger Zug in der z-Richtung.

3) $n = 3$; $f = {}^1/_2\, A_3 (2\, z^3 - 3\, z r^2)$, $\psi_1 = 3\, B_3\, r^2 z$. — $u_r = 3\,(- A_3 + B_3)\, rz$;
$u_z = {}^3/_2\, A_3 (2\, z^2 - r^2) - \frac{\lambda + \mu}{2\,\mu} 3\, B_3\, r^2$; $\sigma_r = \sigma_\vartheta = - 6\, A_3\, \mu z + 6\, B_3 (\lambda + \mu)\, z$;
$\sigma_z = 12\, A_3\, \mu z + 6\, B_3\, \lambda z$; $\tau = - 6\, A_3\, \mu r - 3\, B_3\, \lambda r$.

Beispiel 3a: $A_3 = - {}^1/_2 \frac{\lambda}{\mu} B_3$: Biegung der Kreisplatte durch gleichförmige Randmomente. $u_r = 3\, B_3 \frac{\lambda + 2\,\mu}{2\,\mu} rz$; $u_z = - {}^3/_2\, B_3 \frac{\lambda}{\mu} z^2 - 3\, B_3 \frac{\lambda + 2\,\mu}{4\,\mu} r^2$;
$\sigma_r = \sigma_\vartheta = 3\, B_3 (3\,\lambda + 2\,\mu)\, z$; $\sigma_z = \tau = 0$.

Das auf die Längeneinheit bezogene Randmoment für die Platte von der Dicke $2\,h$ ist $M = 2\, B_3 (3\,\lambda + 2\,\mu)\, h^3$. Die Mittelfläche $z = 0$ wölbt sich parabolisch (annähernd sphärisch).

Beispiel 3b: $A_3 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} B_3$; $u_r = - 3\, B_3 \frac{\lambda}{\mu} rz$; $u_z = 3\, B_3 \frac{\lambda + \mu}{\mu} (z^2 - r^2)$;
$\sigma_r = \sigma_\vartheta = 0$; $\sigma_z = 6\, B_3 (3\,\lambda + 2\,\mu)\, z$; $\tau = - 3\, B_3 (3\,\lambda + 2\,\mu)\, r$.

Wir bezeichnen die Beispiele 2a, 3a als die Hauptlösungen für die Kreisplatte, da sie für die Befriedigung der Randbedingungen der irgendwie symmetrisch belasteten Kreisplatte $z = \pm h$, $r = a$ wichtig sind: Hat man eine den Bedingungen für die Oberflächen $z = \pm h$ genügende Lösung, so kann man die bei ihr etwa auftretende resultierende Randzugkraft nach dem Saint-Venantschen Prinzip durch Ueberlagerung eines Spannunpszustandes 2a, ebenso das bei ihr etwa auftretende Randmoment durch Ueberlagerung eines Spannungszustandes 3a den vorgeschriebenen Werten T, M anpassen. Insbesondere kann man so der Bedingung, daß die Platte in $r = a$ frei aufgelagert $[T = M = (u_z)_{z=0} = 0]$ oder eingespannt $\left[T = (u_z)_{z=0} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{z=0} = 0\right]$ ist, genügen, wenn man noch ein konstantes u_z hinzufügt.

---

[1]) Love, a. a. O., S. 244. Die hier aufgezeigte Analogie gibt möglicherweise eine Handhabe, die beim ebenen Problem durchgeführte Formulierung des Randwertproblems mit Hilfe einer einzigen erzeugenden Funktion — der Airyschen Spannungsfunktion — auch auf den Fall der achsensymmetrischen Deformation zu übertragen.

[2]) A. Timpe, a. a. O., S. 489.

$$
\begin{aligned}
4)\; n &= 4;\; f = \tfrac{1}{8} A_4 (8 z^4 - 24 r^2 z^2 + 3 r^4);\; \psi_1 = 3 B_4 (2 r^2 z^2 - \tfrac{1}{2} r^4);\\
u_r &= A_4 (-6 r z^2 + \tfrac{3}{2} r^3) + B_4 \left(6 r z^2 + \frac{3\lambda}{2\mu} r^3\right);\; u_z = A_4 (4 z^3 - 6 r^2 z) - B_4 \frac{\lambda+\mu}{\mu} 6 r^2 z;\\
\sigma_r &= 3 A_4 \mu (-4 z^2 + 3 r^2) + 3 B_4 [4 (\lambda + \mu) z^2 + \lambda r^2];\\
\sigma_\vartheta &= 3 A_4 \mu (-4 z^2 + r^2) + 3 B_4 [4 (\lambda + \mu) z^2 - \lambda r^2];\\
\sigma_z &= 12 A_4 \mu (2 z^2 - r^2) + 6 B_4 [2 \lambda z^2 - (3\lambda + 2\mu) r^2];\; \tau = -24 A_4 \mu r z - 12 B_4 \lambda r z.
\end{aligned}
$$

Wie die ausgerechneten Fälle bereits zeigen, können wir mit Hilfe der Polynomlösungen mit ihren willkürlichen Konstantenpaaren A_n, B_n das Problem des symmetrisch belasteten Kreiszylinders bewältigen, für den auf $r = a$ die Normalspannungen σ_r und die Tangentialspannungen τ als Potenzreihen in z vorgeschrieben sind. Dabei ist angenommen, daß es für die Endflächen $z = \pm h$ nur auf die Verwirklichung gewisser (mit den Manteltangentialspannungen statisch verträglicher) resultierender Zugkräfte Z_+, Z_- nach dem Saint-Venantschen Prinzip ankommt, wofür die willkürlichen Konstanten der Lösung 2) zur Verfügung stehen. Die Anwendung dieser Reihenlösungen auf praktische Probleme, z. B. die Umschlingungsaufgabe, soll hier im Augenblick nicht näher diskutiert werden; die Praktiker mögen zunächst Probleme stellen!

Für die symmetrisch belastete Kreisplatte reichen unsere Polynomlösungen zur Befriedigung der speziellen Oberflächenbedingungen für σ_z und τ auf den beiden Seitenflächen $z = \pm h$ nicht aus, so daß hier die Heranziehung der mit Besselschen Funktionen gebildeten Lösungen[1]) i. a. unvermeidlich bleiben wird. Doch lassen sich für Platten Einzelergebnisse von besonderem Interesse ableiten, wie der Fall $n = 5$ zeigt.

$$
\begin{aligned}
5)\; n &= 5;\; f = \tfrac{1}{8} A_5 (8 z^5 - 40 z^3 r^2 + 15 z r^4);\; \psi_1 = 5 B_5 (2 z^3 r^2 - \tfrac{3}{2} z r^4);\\
u_r &= A_5 (-10 z^3 r + \tfrac{15}{2} z r^3) + B_5 \left(10 z^3 r + \frac{15\lambda}{2\mu} z r^3\right);\\
u_z &= A_5 (5 z^4 - 15 z^2 r^2 + \tfrac{15}{8} r^4) + B_5 \left(-\frac{\lambda+\mu}{\mu} 15 z^2 r^2 + \frac{\lambda+\mu}{\mu} \tfrac{15}{4} r^4\right);\\
\sigma_r &= A_5 \mu (-20 z^3 + 45 z r^2) + B_5 [20 (\lambda + \mu) z^3 + 15 \lambda z r^2];\\
\sigma_\vartheta &= A_5 \mu (-20 z^3 + 15 z r^2) + B_5 [20 (\lambda + \mu) z^3 - 15 \lambda z r^2];\\
\sigma_z &= A_5 \mu (40 z^3 - 60 z r^2) + B_5 [20 \lambda z^3 - 30 (3\lambda + 2\mu) z r^2];\\
\tau &= A_5 \mu (-60 z^2 r + 15 r^3) + B_5 [-30 \lambda z^2 r + \tfrac{15}{2} (3\lambda + 2\mu) r^3].
\end{aligned}
$$

Beispiel 5a: Biegung einer am Rande $r = a$ gestützten Kreisplatte durch gleichförmige Last p.

Wählt man $A_5 = -B_5 \dfrac{3\lambda + 2\mu}{2\mu}$, so reduziert man gleichzeitig σ_z auf die Form $-40 B_5 (\lambda + \mu) z^3$ und τ auf die Form $60 B_5 (\lambda + \mu) z^2 r$. Durch Ueberlagerung eines Spannungszustandes 3b kann man τ für $z = \pm h$ zum Verschwinden bringen und sodann durch Ueberlagerung eines gleichförmigen Zuges in der z-Richtung auch σ_z für $z = -h$ annullieren. Beseitigt man noch das Randmoment durch Hinzufügen eines Spannungszustandes 3a und macht $u_z = 0$ für $z = 0$, $r = a$ durch Superposition eines konstanten Gliedes in u_z, so ergibt sich für die durch gleichförmige Last p (auf $z = h$) beanspruchte, in $r = a$ frei aufgelagerte Kreisplatte folgendes Deformationssystem:

$$
\left.
\begin{aligned}
u_r &= \frac{p r}{E} \Big\{ \tfrac{1}{2} \sigma - \frac{3(1-\sigma)}{32} \frac{z}{h^3} [(3 + \sigma) a^2 - (1 + \sigma) r^2] \\
&\qquad + \tfrac{3}{40} \frac{z}{h} (2 + 9\sigma - \sigma^2) - \tfrac{1}{8} \frac{z^3}{h^3} (2 + \sigma - \sigma^2) \Big\}\\
u_z &= -\frac{p}{8 D} (a^2 - r^2) \Big\{ \tfrac{1}{8} \left(\frac{5 + \sigma}{1 + \sigma} a^2 - r^2\right) + \tfrac{1}{5} \frac{8 + \sigma + \sigma^2}{1 - \sigma^2} h^2 \Big\}\\
&\qquad + \frac{p z}{E} \Big\{ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3\sigma}{32} \frac{z}{h^3} [(3 + \sigma) a^2 - 2 (1 + \sigma) r^2]\\
&\qquad - \tfrac{3}{40} \frac{z}{h} (5 + 2\sigma + \sigma^2) + \tfrac{1}{16} \frac{z^3}{h^3} (1 + \sigma)^2 \Big\}\\
\sigma_r &= p \Big\{ \tfrac{3}{32} \frac{z}{h^3} (3 + \sigma)(r^2 - a^2) + (2 + \sigma) \left(\tfrac{3}{40} \frac{z}{h} - \tfrac{1}{8} \frac{z^3}{h^3}\right) \Big\}\\
\sigma_\vartheta &= p \Big\{ \tfrac{3}{32} \frac{z}{h^3} [-(3 + \sigma) a^2 + (1 + 3\sigma) r^2] + (2 + \sigma) \left(\tfrac{3}{40} \frac{z}{h} - \tfrac{1}{8} \frac{z^3}{h^3}\right) \Big\}\\
\sigma_z &= p \Big\{ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \frac{z}{h} \left(\frac{z^2}{h^2} - 3\right) \Big\} \qquad \tau = \tfrac{3}{8} \frac{p}{h^3} r (h^2 - z^2)
\end{aligned}
\right\} \quad (8).
$$

---

[1]) Vgl. A. E. H. Love, S. 318.

Dabei sind die Elastizitätskonstanten $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$, $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$, $D = {}^2/_3\, Eh^3/(1 - \sigma^2)$ benutzt[1]). Die maximalen Radial- und Ringspannungen ergeben sich übereinstimmend für $r = 0$, $z = \pm h$:

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\vartheta)_{\max} = \mp \frac{3p}{32}(3 + \sigma)\frac{a^2}{h^2} \mp \frac{p}{20}(2 + \sigma) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Da σ_ϑ mit wachsendem r schwächer abnimmt als σ_r, besteht die Gefahr eines Durchmesserrisses. Das erste Glied stimmt mit dem nach der üblichen Näherungstheorie gefundenen maximalen Spannungswert[2]) überein. Für $\sigma = 0{,}3$ wird $\sigma_{\max} = \mp\left(0{,}31\frac{a^2}{h^2} + 0{,}115\right)p$; ist beispielsweise $a = 10\,h$, so wird $\sigma_{\max} = \mp(31 + 0{,}115)\,p$; das Korrektionsglied beträgt dann also noch nicht 4 ‰ des führenden Gliedes und ist von der Größenordnung der »lokalen Störungen«, die die tatsächlichen Randspannungen von denjenigen unseres Lösungssystems unterscheiden.

Für die Durchbiegung der Plattenmitte erhalten wir

$$(u_z)_{\max} = -\frac{3p}{128\,Eh^3}(1 - \sigma)(5 + \sigma)\,a^4 - \frac{3p}{80\,Eh}(8 + \sigma + \sigma^2)\,a^2 \quad . \; . \quad (10).$$

Das erste Glied stimmt mit dem nach der üblichen Näherungstheorie errechneten Biegungspfeil überein. Für $\sigma = 0{,}3$ wird $(u_z)_{\max} = -0{,}087\frac{a^4 p}{Eh^3} - 0{,}313\frac{a^2 p}{Eh}$; ist beispielsweise $a = 10\,h$, so wird $(u_z)_{\max} = -(87 + 3)\frac{a\,p}{E}$; das Korrektionsglied beträgt 36 ‰ des führenden Gliedes. Zusammenfassend können wir sagen, daß das Korrektionsglied in $\sigma_{\max}$ und $(u_z)_{\max}$ gegenüber der üblichen Näherungstheorie erst bei verhältnismäßig dicken Platten Bedeutung gewinnt. Den Verlauf der Spannungen σ_r, σ_ϑ für $z = h$ veranschaulicht Abb. 1. Die Frage, wie weit die geometrisch-mechanischen Voraussetzungen der üblichen Näherungstheorie Geltung haben, wird in dem allgemeineren Fall der Kreisringplatte besprochen.

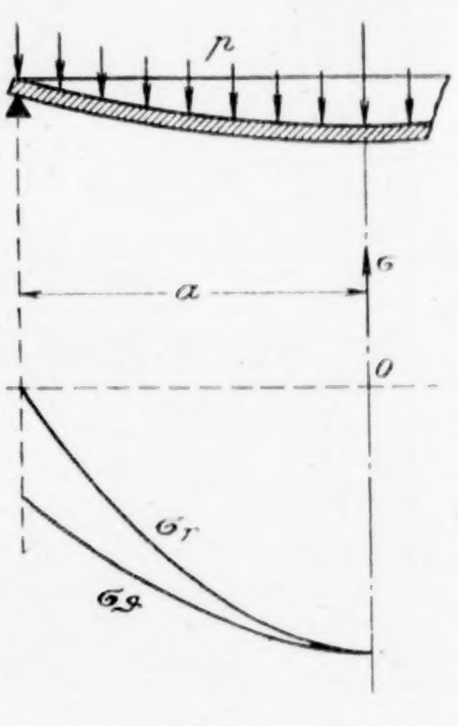


Abb. 1

Beispiel 5b: **Biegung einer am Rande $r = a$ eingespannten Kreisplatte durch gleichförmige Last p.** Indem wir über (8) eine geeignete Hauptlösung überlagern, erzielen wir $\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{z=0} = 0$ für $r = a$ und erhalten das Deformationssystem:

$$\left.\begin{aligned}
u_r &= \frac{pr}{E}\left\{{}^1/_2\,\sigma - \frac{3(1-\sigma^2)}{32}\frac{z}{h^3}(a^2 - r^2) + {}^3/_4(1+\sigma)\frac{z}{h} - {}^1/_8(1+\sigma)(2-\sigma)\frac{z^3}{h^3}\right\}\\
u_z &= -\frac{p}{64\,D}(a^2 - r^2)^2 + \frac{pz}{E}\left\{-{}^1/_2 + \frac{3\sigma(1+\sigma)}{32}\frac{z}{h^3}(a^2 - 2r^2) - {}^3/_8\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\frac{z}{h}\right.\\
&\qquad\left. + {}^1/_{16}(1+\sigma)^2\frac{z^3}{h^3}\right\}\\
\sigma_r &= p\left\{{}^3/_{32}\frac{z}{h^3}\left[(3+\sigma)r^2 - (1+\sigma)a^2\right] + \frac{3}{4(1-\sigma)}\frac{z}{h} - \frac{2+\sigma}{8}\frac{z^3}{h^3}\right\}\\
\sigma_\vartheta &= p\left\{{}^3/_{32}\frac{z}{h^3}\left[-(1+\sigma)a^2 + (1+3\sigma)r^2 + \frac{3}{4(1-\sigma)}\frac{z}{h} - \frac{2+\sigma}{2}\frac{z^3}{h^3}\right.\right\}\\
\sigma_z &= p\left\{-{}^1/_2 + {}^1/_4\frac{z}{h}\left(\frac{z^2}{h^2} - 3\right)\right\};\quad \tau = {}^3/_8\frac{pr}{h^3}(h^2 - z^2)
\end{aligned}\right\} \quad (11).$$

Die Durchbiegung im Plattenmittelpunkt wird $(u_z)_{\max} = -\frac{3(1-\sigma^2)}{128\,Eh^3}a^4 p$, in Uebereinstimmung mit der Näherungstheorie; beispielsweise für $\sigma = 0{,}3$: $(u_z)_{\max} = -0{,}021\frac{a^4 p}{Eh^3}$.

[1]) Vgl. A. E. H. Love, S. 554.

[2]) Vgl. A. und L. Föppl, Drang und Zwang I, S. 178, wo die ganze Plattendicke mit h bezeichnet ist und $m = \frac{1}{\sigma}$.

Für $z = h$, $r = 0$ treten gleiche Radial- und Ringspannungen $-\frac{p}{h^2}\,{}^3/_{32}\,(1+\sigma)\,a^2 + \frac{4+\sigma+\sigma^2}{8\,(1-\sigma)}\,p$ auf. Für $z = h$, $r = a$ erhalten wir

$$(\sigma_r)_{\max}\,\frac{3\,a^2\,p}{16\,h^2} + \frac{4+\sigma+\sigma^2}{8\,(1-\sigma)}\,p;\quad \sigma_\vartheta = \frac{3\,\sigma\,a^2\,p}{16\,h^2} + \frac{4+\sigma+\sigma^2}{8\,(1-\sigma)}\,p \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Die überwiegende maximale Radialspannung sucht am Rande einen Kreisriß hervorzubringen. Das erste Glied stimmt mit dem nach der Näherungstheorie erhaltenen Spannungswert überein. Für $\sigma = 0{,}3$ wird $(\sigma_r)_{\max} = \left(0{,}188\,\frac{a^2}{h^2} + 0{,}784\right)p$; ist beispielsweise $a = 10\,h$, so wird $(\sigma_r)_{\max} = (18{,}8 + 0{,}784)\,p$; das Korrektionsglied beträgt hier also 42 ‰ des führenden Gliedes. Allgemein können wir sagen, daß das Korrektionsglied erst bei verhältnismäßig dicken Platten Bedeutung gewinnt. Den Verlauf der Spannungen σ_r, σ_ϑ für $z = h$ veranschaulicht Abb. 2.

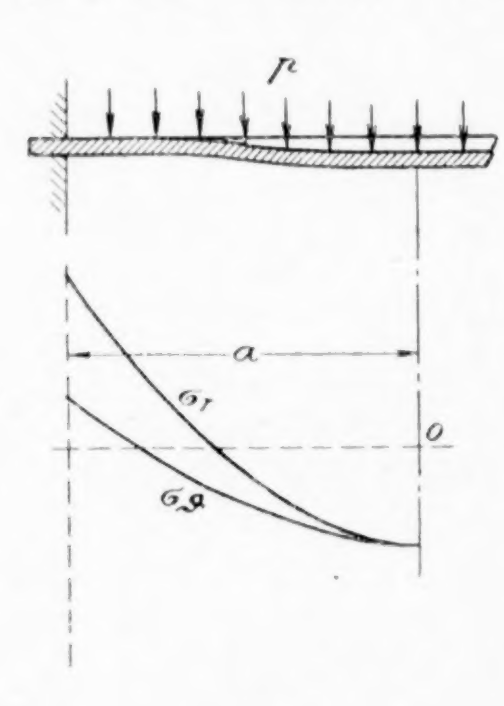


Abb. 2

3. Hohlzylinder und Kreisringplatte. Der Körper werde begrenzt von den Basisflächen $z = \pm h$ und den Zylinderflächen $r = a$, $r = b$, wo $a > b$. Um den Bedingungen auf den beiden Mantelflächen des Hohlzylinders genügen zu können, müssen wir zu den bisher untersuchten Lösungen solche hinzunehmen, die für $r = 0$ divergieren. Als Lösungen der Differentialgleichung (5) für ψ, die die Potenzen von z mit positiv ganzzahligem Exponenten enthalten und mit $r = 0$ ins Unendliche wachsen, ergeben sich[1]) die Ausdrücke von der Form:

$$\Psi = a_0\,z^n + (a_1 \lg r + \alpha_1)\,r^2 z^{n-2} + (a_2 \lg r + \alpha_2)\,r^4 z^{n-4} + (a_3 \lg r + \alpha_3)\,r^6 z^{n-6} + \ldots \quad (13),$$

wo

$$a_1 = -{}^1/_2\,n(n-1)\,a_0;\quad a_2 = -\frac{(n-2)(n-3)}{8\cdot 1}\,a_1;\quad a_3 = -\frac{(n-4)(n-5)}{8\cdot 3}\,a_2;\quad a_4 = -\frac{(n-6)(n-7)}{8\cdot 6}\,a_3;$$

$$a_5 = -\frac{(n-8)(n-9)}{8\cdot 10}\,a_4;\quad a_6 = -\frac{(n-10)(n-11)}{8\cdot 15}\,a_5;\ \ldots$$

$$\alpha_1 = 0;\quad \alpha_2 = -{}^1/_4\,{}^3/_1\,a_2;\quad \alpha_3 = -{}^1/_4\,({}^3/_1 + {}^5/_3)\,a_3;\quad \alpha_4 = -{}^1/_4\,({}^3/_1 + {}^5/_3 + {}^7/_6)\,a_4;$$
$$\alpha_5 = -{}^1/_4\,({}^3/_1 + {}^5/_3 + {}^7/_6 + {}^9/_{10})\,a_5;\quad \alpha_6 = -{}^1/_4\,({}^3/_1 + {}^5/_3 + {}^7/_6 + {}^9/_{10} + {}^{11}/_{15})\,a_6 \ldots$$

Hieraus kann man gemäß (6) eine Potentialfunktion Φ durch den Ansatz $\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ gewinnen, also:

$$\Phi = [a_1\,(2\lg r + 1) + 2\,\alpha_1]\,z^{n-2} + [a_2\,(4\lg r + 1) + 4\,\alpha_2]\,r^2 z^{n-4} + [a_3\,(6\lg r + 1) + 6\,\alpha_3]\,r^4 z^{n-6} + \ldots \quad . \quad . \quad (14).$$

Benutzen wir die Ausdrücke (14) für f mit $n = 2, 3, 4 \ldots$ und die Ausdrücke (13) für ψ_1 mit $n = 0, 1, 2 \ldots$, so ergeben sich unter Beifügung beliebiger Multiplikatoren C_n, D_n folgende partikuläre Lösungen:

6) $f = C_1 \lg r$ (oder $\psi_1 = \text{konst.}$); $u_r = \frac{C_1}{r}$, $u_z = 0$; $\sigma_r = -\frac{2\,C_1\,\mu}{r^2}$, $\sigma_\vartheta = \frac{2\,C_1\,\mu}{r^2}$, $\sigma_z = \tau = 0$.

Verbunden mit der Hauptlösung (2a) für die Kreisplatte liefert dies System die Lösung für den Fall der Reckung einer Kreisringplatte durch beliebige symmetrische Zug- oder Druckkräfte am Innen- und Außenrande und damit die »erste Hauptlösung für die Kreisringplatte«. Durch Hinzunahme eines gleichförmigen axialen Zuges ergibt sich das oft untersuchte Beispiel des Rohres unter innerem und äußerem Druck bei vorgeschriebenen Bedingungen für die Endflächen $z = \pm h$ (siehe Love, S. 169).

7) $f = C_2\,z \lg r$; $\psi_1 = D_2\,z$; $u_r = \left(C_2 + D_2\,\frac{\lambda + 2\,\mu}{\mu}\right)\frac{z}{r}$; $u_z = C_2 \lg r - D_2\,\frac{\lambda + \mu}{2\,\mu}$;

$$\sigma_r = -2\,[C_2\,\mu + D_2\,(\lambda + 2\,\mu)]\,\frac{z}{r^2};\quad \sigma_\vartheta = 2\,[C_2\,\mu + D_2\,(\lambda + 2\,\mu)]\,\frac{z}{r^2};$$

$$\sigma_z = 0;\quad \tau = [2\,C_2\,\mu + D_2\,(\lambda + 2\,\mu)]\,\frac{1}{r}\,.$$

[1]) Vergl. A. Timpe, a. a. O. S. 492, wo $r\,\mathfrak{v} = \Psi$ zu setzen ist.

Beispiel 7a: $C_2 = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} D_2$. Biegung der Kreisringplatte durch gleichförmige Momente am Innen- und Außenrande.

$$u_r = D_2 \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{z}{r}; \quad u_z = -\frac{D_2}{2\mu}[(\lambda + 2\mu)\lg r + (\lambda + \mu)]; \quad \sigma_r = -D_2(\lambda + 2\mu)\frac{z}{r^2};$$

$$\sigma_\vartheta = D_2(\lambda + 2\mu)\frac{z}{r^2}; \quad \sigma_z = \tau = 0.$$

Das auf die Längeneinheit bezogene Randmoment für die Platte von der Dicke $2h$ ist $M_a = -D_2(\lambda + 2\mu)\frac{2h^3}{3a^2}$ bezw. $M_b = -D_2(\lambda + 2\mu)\frac{2h^3}{3b^2}$. Verbunden mit Beispiel 3a liefert dies System die Lösung für den Fall der Biegung der Kreisringplatte durch beliebig vorgeschriebene symmetrische Momente am Innen- und Außenrande und damit die »zweite Hauptlösung für die Kreisringplatte«.

Um beispielsweise für $r = b$ das Randmoment zum Verschwinden zu bringen, wählen wir $D_2 = \frac{3(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} b^2 B_3$. Der dann für das Randmoment auf $r = a$ sich ergebende Wert $2B_3(3\lambda + 2\mu)h^3\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ deckt sich bei unbegrenzt abnehmendem b mit dem in 3a bei der Platte ohne Durchbohrung auftretenden Wert; die Radial- und Ringspannungen des kombinierten Systems werden aber für den Innenrand gleich null bezw. gleich $6B_3(3\lambda + 2\mu)z$. Somit sind die inneren Ringspannungen für die mit einer feinen zentrischen Durchbohrung versehene Kreisplatte, die durch symmetrische Momente am Außenrande gebogen wird, doppelt so groß wie diejenigen bei der lochlosen Kreisplatte. (Der bei diesen Lösungen noch auftretende konstante u_z-Wert am Rande wird durch Ueberlagerung einer gleichmäßigen axialen Verschiebung des ganzen zum Verschwinden gebracht.)

8) $f = C_3[(2\lg r + 1)z^2 - (\lg r - {}^1/_2)r^2]; \quad \psi_1 = D_3(z^2 - r^2\lg r);$

$$u_r = C_3\left(2\frac{z^2}{r} - 2r\lg r\right) + D_3\left(-r\lg r + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} r + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{z^2}{r}\right);$$

$$u_z = 2C_3(2\lg r + 1)z - D_3\frac{\lambda + \mu}{\mu} z;$$

$$\sigma_r = -4C_3\mu\left(\frac{z^2}{r^2} + \lg r + 1\right) + D_3\left[-2(\lambda + \mu)\lg r - \mu - 2(\lambda + 2\mu)\frac{z^2}{r^2}\right];$$

$$\sigma_\vartheta = 4C_3\mu\left(\frac{z^2}{r^2} - \lg r\right) + D_3\left[-2(\lambda + \mu)\lg r + \mu + 2(\lambda + 2\mu)\frac{z^2}{r^2}\right],$$

$$\sigma_z = 4C_3\mu(2\lg r + 1) - D_3[2\lambda\lg r + 3\lambda + 2\mu]; \quad \tau = 8C_3\mu\frac{z}{r} + 2D_3(\lambda + 2\mu)\frac{z}{r}.$$

Mit $C_3 = -\frac{\lambda + 2\mu}{4\mu} D_3$ erzielen wir beispielsweise $\sigma_z = -4D_3(\lambda + \mu)(\lg r + 1)$, $\tau = 0$, also den Fall einer Kreisringplatte, deren beiderseitige Normalbelastung demselben logarithmischen Gesetz folgt. Wie aus den ausgerechneten Fällen bereits folgt, wird mit den in Abschnitt **2** und **3** diskutierten Lösungen das Problem des achsensymmetrisch beanspruchten Hohlzylinders bewältigt, für den auf $r = a$ und $r = b$ die Normalspannungen σ_r und die Tangentialspannungen τ als Potenzreihen in z vorgeschrieben sind; Voraussetzung ist dabei, daß es für die Endflächen $z = \pm h$ genügt, gewisse mit den Manteltangentialspannungen verträgliche Zugresultanten Z_+, Z_- auf Grund des St. Venantschen Prinzips durch eine geeignet spezialisierte Lösung 2) zu realisieren. Für die symmetrisch belastete Kreisringplatte reichen die hier diskutierten Lösungen zur Befriedigung der speziellen Randbedingungen für σ_z und τ auf den beiden Basisflächen $z = \pm h$ nicht aus, führen aber auf wichtige Sonderfälle.

9) $f = C_4[(2\lg r + 1)z^3 - 3r^2\lg r\cdot z + {}^3/_2 r^2 z], \quad \psi_1 = D_4(z^3 - 3r^2\lg r\cdot z);$

$$u_r = C_4\left[\frac{2z^3}{r} - 6r\lg r\cdot z\right] + D_4\left[\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\frac{z^3}{r} - 3r\lg r\cdot z + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} 3r\cdot z\right];$$

$$u_z = C_4[(2\lg r + 1)3z^2 - 3r^2\lg r + {}^3/_2 r^2] + D_4\left[\frac{\lambda + \mu}{2\mu} 3r^2\lg r - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} 3z^2\right];$$

$$\sigma_r = -4C_4\mu\left[\frac{z^3}{r^2} + 3z + 3\lg r\cdot z\right] - D_4\left[2(\lambda + 2\mu)\frac{z^3}{r^2} + 6(\lambda + \mu)\lg r\cdot z + 3\mu z\right];$$

$$\sigma_\vartheta = 4\,C_4\,\mu\left[\frac{z^3}{r^2} - 3\lg r\cdot z\right] + D_4\left[2\,(\lambda+2\,\mu)\,\frac{z^3}{r^2} - 6\,(\lambda+\mu)\lg r\cdot z + 3\,\mu z\right];$$

$$\sigma_z = 12\,C_4\,\mu\,[2\lg r + 1]\,z + D_4\,[-6\,\lambda\lg r\cdot z - 3\,(3\,\lambda+2\,\mu)\,z];$$

$$\tau = 12\,C_4\,\mu\left(\frac{z^2}{r} - r\lg r\right) + D_4\left[3\,(\lambda+2\,\mu)\,\frac{z^2}{r} + 3\,\lambda\,r\lg r + 3\,(\lambda+\mu)\,r\right].$$

Beispiel 9a: **Kreisringplatte am freien Innenrand belastet; Außenrand gestützt.**

Die Lösungen 1), 3), 7), 9) können wir bei geeigneter Wahl der Konstanten so kombinieren, daß für $r = a$, $r = b$ außer den Spannungsresultanten auch die Momente verschwinden und daß die Oberflächen $z = \pm h$ spannungsfrei werden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
u_r = C\Bigg\{ & \frac{3\,(\lambda+2\,\mu)}{\mu}\,h^3\left[(3\,\lambda+2\,\mu)\,\frac{a^2\lg a - b^2\lg b}{a^2\,b^2} + 2\,(\lambda+\mu)\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\right] r z \\
& - \frac{3\,(3\,\lambda+2\,\mu)\,(\lambda+2\,\mu)}{\mu}\,h^3\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\,r\lg r\cdot z + \frac{3\,(3\,\lambda+2\,\mu)}{\mu}\,h^3\left[-\frac{3\,\lambda+4\,\mu}{5}\,h^2\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\right. \\
& \left. + (3\,\lambda+2\,\mu)\,(\lg a - \lg b)\right]\frac{z}{r} + \frac{(3\,\lambda+2\,\mu)\,(3\,\lambda+4\,\mu)}{\mu}\,h^3\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\,\frac{z^3}{r}\Bigg\} \\
u_z = C\Bigg\{ & -\frac{3\,\lambda}{\mu}\,h^3\left[(3\,\lambda+2\,\mu)\,\frac{a^2\lg a - b^2\lg b}{a^2\,b^2} + \frac{\lambda+2\,\mu}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\right] z^2 \\
& + \frac{3\,\lambda\,(3\,\lambda+2\,\mu)}{\mu}\,h^3\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\lg r\cdot z^2 + \frac{3\,(\lambda+2\,\mu)}{2\,\mu}\,h^3\left[(3\,\lambda+2\,\mu)\,\frac{a^2\lg a - b^2\lg b}{a^2\,b^2}\right. \\
& \left. + \frac{7\,\lambda+6\,\mu}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\right](a^2 - r^2) - \frac{3\,(\lambda+2\,\mu)\,(3\,\lambda+2\,\mu)}{2\,\mu}\,h^3\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\,(a^2\lg a - r^2\lg r) \\
& + \frac{3\,(3\,\lambda+2\,\mu)}{\mu}\,h^3\left[\frac{17\,\lambda+16\,\mu}{5}\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}\,h^2 + (3\,\lambda+2\,\mu)\,(\lg a - \lg b)\right](\lg a - \lg r)\Bigg\}
\end{aligned} \qquad (15).$$

Wir bezeichnen diese Lösung als die »dritte Hauptlösung für die Kreisringplatte«. Die in irgend einer Mantelfläche $r =$ konst. übertragene gesamte Scherkraft ist $P = -32\,\pi\,C\,(3\,\lambda+2\,\mu)\,(\lambda+\mu)\,h^6\,\frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2}$. Sie verteilt sich über diese Fläche nach dem Gesetz $\tau = -\frac{3\,P}{8\,\pi\,h^3}\,\frac{z^2-h^2}{r}$. Wir haben durchweg $\sigma_z = 0$ und erhalten für $z = h$:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\sigma}_r &= -\frac{3\,(1+\sigma)\,P}{8\,\pi\,h^2}\left[\frac{a^2\lg\frac{a}{r} - b^2\lg\frac{b}{r}}{a^2-b^2} - {}^2/_{15}\,\frac{2-\sigma}{1+\sigma}\,\frac{h^2}{r^2} - \frac{a^2\,b^2}{r^2}\,\frac{\lg\frac{a}{b}}{a^2-b^2}\right] \\
\overline{\sigma}_\vartheta &= -\frac{3\,(1+\sigma)\,P}{8\,\pi\,h^2}\left[\frac{a^2\lg\frac{a}{r} - b^2\lg\frac{b}{r}}{a^2-b^2} + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} + {}^2/_{15}\,\frac{2-\sigma}{1+\sigma}\,\frac{h^2}{r^2} + \frac{a^2\,b^2}{r^2}\,\frac{\lg\frac{a}{b}}{a^2-b^2}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (16).$$

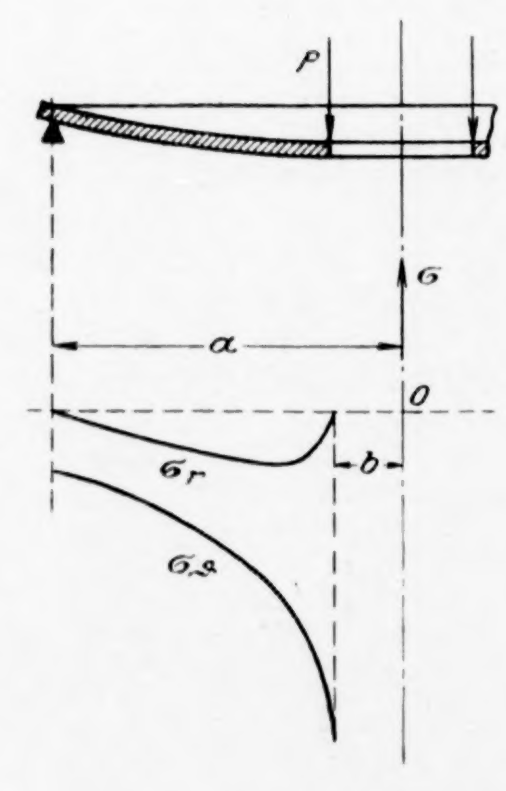


Abb. 3

Der Absolutwert von $\overline{\sigma}_\vartheta$ ist stets größer als der von $\overline{\sigma}_r$, die Ringspannungen sind also die eigentlichen Biegungsspannungen. Für Ringplatten, bei denen h klein im Vergleich zu b und daher durchweg klein gegen r, kann in der Klammer das Glied ${}^2/_{15}\,\frac{2-\sigma}{1+\sigma}\,\frac{h^2}{r^2}$ vernachlässigt werden, und es ergibt sich z. B. für $a = 5\,b$ der in Abb. 3 dargestellte Verlauf der Spannungen $\overline{\sigma}_r$, $\overline{\sigma}_\vartheta$. Am inneren Rande wird $\overline{\sigma}_r = \frac{2-\sigma}{20}\,\frac{P}{\pi\,b^2}$, $\overline{\sigma}_\vartheta$ nimmt hier seinen maximalen Wert an:

$$(\overline{\sigma}_\vartheta)_{\max} = -\frac{3\,(1+\sigma)\,P}{8\,\pi\,h^2}\left[\frac{a^2\lg\frac{a^2}{b^2}}{a^2-b^2} + \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right] - \frac{2-\sigma}{20}\,\frac{P}{\pi\,b^2} \qquad (17).$$

Die beiden Klammerglieder decken sich mit dem Ergebnis der Näherungstheorie. Das dritte Glied hat für $\sigma = 0{,}3$ den Wert $-0{,}0449\,\frac{P}{\pi\,b^2}$, beträgt z. B. für $b = 4\,h$ erst $20\,^0/_{00}$ des zweiten Gliedes, gewinnt jedoch für abnehmendes b, also für Kreisplatten mit feiner zentrischer Durchbohrung, wachsende und schließlich ausschlaggebende Be-

deutung. Es würde z. B. für $\sigma = 0{,}3$, $a = 10h = 100b$ etwa das doppelte des ersten Gliedes ausmachen. Diese Besonderheiten, die das dritte Glied (Korrektionsglied) in das Deformationsbild hineinbringt, wird man nicht als eine Nichtbestätigung der Näherungstheorie im Falle feiner zentrischer Durchbohrung auslegen dürfen. Denn der mit diesem dritten Glied absolut genommen übereinstimmende Wert von $\overline{\sigma_r}$ am Innenrande wird in demselben Augenblick, wo man zwecks Annullierung des Randmoments das Saint-Venantsche Prinzip anwendet, als »lokale Störung« abgetan, also als unbeträchtlich für die Problemstellung vorausgesetzt. Eine Verbesserung bedeutet das Korrektionsglied nur so lange, wie es verhältnismäßig unbedeutend ist. Die Formeln (15), (16), (17) geben eine Handhabe zur Beurteilung der Beanspruchung einer kreisförmigen Vollscheibe, die im Mittelpunkt eine Einzellast trägt, aber infolge eines etwa bereits durch die Last verursachten zentrischen Defekts keine Radialspannungen im Kernstück zu übertragen vermag.

Beispiel 9b: Kreisringplatte am axial verschieblichen eingespannten Innenrand belastet; Außenrand gestützt.

Wir überlagern über (15) diejenige zweite Hauptlösung für die Kreisringplatte, die für den Außenrand $r = a$ verschwindendes Biegungsmoment ergibt:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{3D}{2\mu}\left\{(\lambda+2\mu)\, r z + (3\lambda+2\mu)\, a^2 \frac{z}{r}\right\} \\ u_z &= -\frac{3D}{2\mu}\left\{\lambda z^2 + \frac{\lambda+2\mu}{2} r^2 + (3\lambda+2\mu)\, a^2\left[\lg r + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right]\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (18).$$

Um für die Verbindung von (15) und (18) $\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{z=0}$ auf $r = b$ zum Verschwinden zu bringen, wählen wir

$$D = -\frac{2h^3 C}{(3\lambda+2\mu)\,a^2 + (\lambda+2\mu)\,b^2}\left\{4(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)\lg\frac{a}{b} + \frac{a^2-b^2}{a^2}\left[2(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu) + {}^1/_5\,(3\lambda+2\mu)(17\lambda+16\mu)\frac{h^2}{b^2}\right]\right\}.$$

Während die im vorigen Beispiel geltende Verteilung σ_z und τ bestehen bleibt, treten in σ_r, σ_ϑ auf $z = h$ zu (16) noch die Glieder

$$\overline{\sigma_r} = 3D(3\lambda+2\mu)\,h\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); \quad \overline{\sigma_\vartheta} = 3D(3\lambda+2\mu)\,h\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \quad . \quad . \quad (19).$$

Führen wir wie früher noch die Gesamtlast P ein, so ergeben sich am Innenrand

$$\left.\begin{aligned} \overline{(\sigma_r)}_{r=b} &= -\frac{3P}{8\pi h^2}\,\frac{1}{1+\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\frac{b^2}{a^2}}\left[\lg\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2-b^2}{a^2}\,\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right] - \eta \\ \overline{(\sigma_\vartheta)}_{r=b} &= -\frac{3\sigma P}{8\pi h^2}\,\frac{1}{1+\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\frac{b^2}{a^2}}\left[\lg\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2-b^2}{a^2}\,\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right] + \eta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (20);$$

hier ist $\eta = \frac{4+\sigma}{8}\,\frac{P}{\pi b^2}$, falls b klein gegen a; für $\sigma = 0{,}3$ hat η den Wert $0{,}5375\,\frac{P}{\pi b^2}$, beträgt z. B. für $b = 4h$ etwa 166 ‰ des zweiten Gliedes. Auf alle Fälle liefern diesmal die Radialspannungen am Innenrande die maximale Beanspruchung, sodaß mit der Gefahr des Kreisrisses zu rechnen ist. Beträgt der Innenradius mehr als als das Doppelte der Plattendicke, so ergeben sich aus ihnen die Ringspannungen näherungsweise durch Multiplikation mit σ. In diesem Falle lehrt der Vergleich der Formeln (20) und (17), wenn b klein gegen a: in dem Augenblick, wo die durch die Bedingung $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$ wiedergegebene Versteifung des Innenrandes aufhört, superponieren sich die damit frei werdenden Radialspannungen den Ringspannungen. Derselbe Vorgang wie beim Uebergang von der lochlosen zu der mit einer feinen zentrischen Durchbohrung versehenen Kreisplatte, die durch Momente am Rande $r = a$ gebogen wird (Beispiel 7a)!

Es liegt nahe zu versuchen, die erhaltene Lösung mit dem fundamentalen Problem der Kreisplatte, die eine zentrische Einzellast trägt, in Verbindung zu bringen. Nun sind allerdings bei dieser, im Gegensatz zu der in (20) für kleines b eintretenden Beziehung, zweifellos Radial- und Ringspannung im Mittelpunkt gleich groß. Und doch unterliegt die Ringplatte, die aus ihr durch Aussonderung des die Last P tragenden zylindrischen Kernstücks von kleinem Radius b entsteht, ebenso zweifellos mit sehr

großer Annäherung dem gemischten geometrisch-mechanischen Randbedingungssystem des Beispiels 9b. Macht man also, nach Analogie des Saint-Venantschen Prinzips, die Voraussetzung, daß die Deformationen von Ringplatten, die demselben geometrisch-mechanischen Randbedingungsystem unterliegen, höchstens in unmittelbarer Nachbarschaft der Ränder Verschiedenheiten aufweisen können, so würde man zu der Schlußfolgerung gelangen, daß bei der eine zentrische Einzellast tragenden Kreisplatte in geringer Entfernung vom Mittelpunkt die Radialspannungen vor den Ringspannungen den Vorrang besitzen, während die letzteren in weiterer Entfernung vom Zentrum die Oberhand gewinnen. Demnach würde man bei diesem Belastungsfall zunächst mit einem Kreisriß kleinen Durchmessers zu rechnen haben, der aber nach dem vorhin Gesagten sofort automatisch eine bedeutende Erhöhung der Ringspannungen am Lochrande und damit einen Durchmesserriß auslösen würde. Die Entscheidung darüber, ob diese Folgerungen das Richtige treffen, kann nur durch eine strenge Lösung für die volle Kreisplatte, die eine über die Kreisfläche vom Radius $r \leqq b$ gleichförmig verteilte Last P trägt, und durch Versuche, wie sie Föppl[1]) begonnen und weiterzuführen in Aussicht genommen, gebracht werden. Die von Föppl auf Grund der Näherungstheorie für diesen Belastungsfall hergeleiteten Formeln ergeben mit $b = 2h$, $\sigma = 0{,}25$, b klein gegen a, die Werte:

$$\overline{\sigma_r} = \frac{P}{4h^2}\left(0{,}60 \lg \frac{a}{2h} + 0{,}09\right), \quad \overline{\sigma_\vartheta} = \frac{P}{4h^2}\left(0{,}60 \lg \frac{a}{2h} + 0{,}27\right) \quad . \quad . \quad (21),$$

unsere Formeln dagegen unter denselben Annahmen:

$$\overline{\sigma_r} = \frac{P}{4h^2}\left(0{,}96 \lg \frac{a}{2h} + 0{,}46\right), \quad \overline{\sigma_\vartheta} = \frac{P}{4h^2}\left(0{,}24 \lg \frac{a}{2h} - 0{,}08\right) \quad . \quad . \quad (21').$$

Nach der Näherungstheorie würden also die Ringspannungen überwiegen, aber kleiner ausfallen als die nach unseren Formeln zu befürchtenden Radialspannungen. Die nach unseren Formeln zu erwartende resultierende Anstrengung beträgt rund das Doppelte des nach den Föpplschen Formeln sich ergebenden Werts. Würden wir dagegen als Radius des Kernstücks $b = 4h$ annehmen, so würden unsere Formeln

$$\sigma_r = \frac{P}{4h^2}\left(0{,}96 \lg \frac{a}{2h} - 0{,}33\right), \quad \sigma_\vartheta = \frac{P}{4h^2}\left(0{,}24 \lg \frac{a}{2h} - 0{,}13\right) \quad . \quad . \quad (21'')$$

liefern, und die Abweichung zwischen dem Föpplschen Klammerfaktor in σ_ϑ und dem unsrigen in σ_r würde z. B. für $a = 20h$ nur 23 % betragen. Die Annahme eines größeren Kernstückradius hat den Vorteil, den Einfluß des von den exzeptionellen Verhältnisse in der Plattenmitte stark abhängigen Korrektionsgliedes η in den Hintergrund treten zu lassen, macht es aber notwendig, den noch zu erwartenden Anstieg von σ_r, σ_ϑ nach der Mitte des Kernstücks zu in Rechnung zu setzen, der in Anlehnung an die Formeln (8) auf reichlich 10 % geschätzt werden kann. Danach würden also die nach unsern Folgerungen zu erwartenden maximalen Spannungen in der Plattenmitte die der Föpplschen Näherungsformeln immerhin um mindestens 33 % übertreffen.

Wie Föppl zuerst genauer auseinandergesetzt hat, tritt bei weiterer Verringerung des Radius w der Belastungsfläche der Fall ein, daß der Oberflächendruck $\frac{P}{\pi w^2}$ größer wird als die Biegungsspannungen. Er findet, daß der Oberflächendruck als solcher maßgebend wird für die Bruchgefahr, sobald w kleiner als etwa ein Drittel der Plattendicke gewählt wird. Unsere Formeln (20) enthalten das mit dem Faktor $\frac{P}{\pi b^2}$ behaftete Glied η, das dem Oberflächendruck proportional bleibt, wenn man sich b in einem festen Verhältnis zu w gewählt denkt, und lassen daher den entscheidenden Einfluß des Oberflächendruckes erst für noch kleinere Werte von w vermuten. Mit $w = b$ würde man den kritischen Wert w_0 gleich ein Fünftel der Plattendicke finden. Dieser Wert besitzt jedoch sehr problematische Bedeutung. Denn einmal lassen unsere Formeln die »lokalen Störungen« für $r = b$ außer Acht, andererseits weist das Anschwellen des η Gliedes und der Verschiebungskomponenten auf das Versagen des benutzten elastizitätstheoretischen Ansatzes für sehr kleine r-Werte hin.

Bemerkung 9c: Die drei Hauptlösungen für die Kreisringplatte sind wichtig für die Befriedigung der Auflagerbedingungen für eine irgendwie symmetrisch belastete Kreisringplatte: Hat man eine den Bedingungen für die Basisflächen $z = \pm h$ genügende Lösung, so kann man die bei ihr etwa auftretenden Randmomente durch eine zweite

[1]) »Drang und Zwang« I, S. 198.

Hauptlösung, die Randscherkräfte durch eine dritte Hauptlösung den vorgeschriebenen Werten T_a, T_b; M_a, M_b; N_a, N_b anpassen, wobei $N_a - N_b$ durch die Flächenbelastung der Platte festgelegt ist. Insbesondere kann man auch durch Hinzunahme einer konstanten Verschiebung u_z die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Auflagerbedingungen realisieren, die A. und L. Föppl[1]) wie folgt in acht Fälle gliedern: »Die Platte kann entweder außen frei aufgelagert oder auch eingespannt sein. Oder sie kann innen aufgelagert sein, mit oder ohne Einspannung, während sie außen nicht unterstützt ist. Die andern vier Fälle umfassen die Auflagerung am Innen- und Außenrande zugleich, die an jedem Rande sowohl mit als ohne Einspannung erfolgen kann.« Dazu kommen noch die Fälle, wo ein Rand als eingespannt, aber axial verschieblich anzusehen ist.

Beispiel 9d: Biegung einer am Rande $r = a$ gestützten Kreisringplatte durch gleichförmige Last p.

Das Spannungssystem für eine im Rande $r = a$ gestützte, durch gleichförmige Last p gebogene Kreisplatte (Beispiel 5a) ergibt für einen Punkt der Kreislinie $r = b$ die Radialresultante null, das Biegungsmoment $\frac{p}{16}(\sigma + 3)(b^2 - a^2)$ und die Scherkraft $\frac{p}{2} b$. Bringen wir das Moment durch Ueberlagerung einer passenden zweiten Hauptlösung, die Schwerkraft durch Ueberlagerung einer passenden dritten Hauptlösung zum Verschwinden, so ergibt sich folgendes System:

$$
\begin{aligned}
u_r = {} & \frac{p\,r}{E}\Big\{ {}^1\!/_2\,\sigma - \frac{3(1-\sigma)}{32}\frac{z}{h^3}\big[(3+\sigma)(a^2+b^2) - (1+\sigma)\,r^2\big] + {}^3\!/_{40}\,\frac{z}{h}\,(2 + 9\sigma - \sigma^2) \\
& - {}^1\!/_8\,\frac{z^3}{h^3}(2 + \sigma - \sigma^2)\Big\} - \frac{p z}{E h^3}\,\frac{3(1+\sigma)(3+\sigma)}{32}\,\frac{a^2 b^2}{r} \quad \text{und} \quad \frac{p}{8}\,\frac{b^2}{E h^3}\Big\{(2-\sigma)(1+\sigma)\frac{z^3}{r} \\
& - (1-\sigma^2)\,3 r \lg r \cdot z + \Big[-\frac{(2-\sigma)(1+\sigma)}{5}h^2 + (1+\sigma)^2\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\lg\frac{a}{b}\Big]\frac{3z}{r} \\
& + \Big[\frac{a^2\lg a - b^2 \lg b}{a^2 - b^2}(1 - \sigma^2) + 1 - \sigma\Big]3 r z\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_z = {} & -\frac{p}{8D}(a^2 - r^2)\Big\{ {}^1\!/_8\Big(\frac{5+\sigma}{1+\sigma}a^2 + \frac{2(3+\sigma)}{1+\sigma}b^2 - r^2\Big) + {}^1\!/_5\,\frac{8 + \sigma + \sigma^2}{1 - \sigma^2}h^2\Big\} \\
& - \frac{p}{E h^3}\,\frac{3(1+\sigma)(3+\sigma)}{32}\,a^2 b^2 \lg\frac{a}{r} + \frac{p z}{E}\Big\{- {}^1\!/_2 + \frac{3\sigma}{32}\frac{z}{h^3}\big[(3+\sigma)(a^2+b^2) - 2(1+\sigma)r^2\big] \\
& - {}^3\!/_{40}\,\frac{z}{h}(5 + 2\sigma + \sigma^2) + {}^1\!/_{16}\,\frac{z^3}{h^3}(1+\sigma)^2\Big\} \quad \text{und} \\
& \frac{p}{8}\,\frac{b^2}{E h^3}\Big\{-\Big[3\sigma(1+\sigma)\frac{a^2\lg a - b^2\lg b}{a^2 - b^2} + \frac{3\sigma(1-\sigma)}{2}\Big]z^2 + 3\sigma(1+\sigma)\lg r\cdot z^2 \\
& + 3\Big[{}^1\!/_2\,(1-\sigma^2)\frac{a^2\lg a - b^2\lg b}{a^2 - b^2} + \frac{(3+\sigma)(1-\sigma)}{4}\Big](a^2 - r^3) - {}^3\!/_2\,(1-\sigma^2)(a^2\lg a - r^2\lg r) \\
& + 3(1+\sigma)\Big[\frac{8+\sigma}{5}h^2 + (1+\sigma)\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\lg\frac{a}{b}\Big]\lg\frac{a}{r}\Big\}
\end{aligned}
\qquad (22\,\mathbf{a});
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_r = {} & p\,\Big\{ {}^3\!/_{32}\,(3+\sigma)\frac{z}{h^3}(r^2 - a^2 - b^2) + (2+\sigma)\Big({}^3\!/_{40}\,\frac{z}{h} - {}^1\!/_8\,\frac{z^3}{h^3}\Big) + {}^3\!/_{32}\,(3+\sigma)\frac{a^2 b^2}{h^3}\frac{z}{r^2}\Big\} \\
& \text{und} \quad \frac{p}{8}\,\frac{b^2}{h^3}\Big\{-3(1+\sigma)\lg r\cdot z + 3(1+\sigma)\frac{a^2\lg a - b^2\lg b}{a^2 - b^2}z - (2-\sigma)\frac{z^3}{r^2} \\
& - \Big[-\frac{2-\sigma}{5}h^2 + (1+\sigma)\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\lg\frac{a}{b}\Big]\frac{3z}{r^2}\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_\vartheta = {} & p\,\Big\{ {}^3\!/_{32}\,\frac{z}{h^3}\big[-(3+\sigma)(a^2+b^2) + (1+3\sigma)r^2\big] + (2+\sigma)\Big({}^3\!/_{40}\,\frac{z}{h} - {}^1\!/_8\,\frac{z^3}{h^3}\Big) \\
& - {}^3\!/_{32}\,(3+\sigma)\frac{a^2 b^2}{h^3}\frac{z}{r^2}\Big\} \quad \text{und} \quad \frac{p}{8}\,\frac{b^2}{h^3}\Big\{-3(1+\sigma)\lg r\cdot z + \Big[(1+\sigma)\frac{a^2\lg a - b^2\lg b}{a^2\,b^2} + (1-\sigma)\Big]3z \\
& + (2-\sigma)\frac{z^3}{r^2} + \Big[-\frac{2-\sigma}{5}h^2 + (1+\sigma)\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\lg\frac{a}{b}\Big]\frac{3z}{r^2}\Big\}
\end{aligned}
\qquad (22\,\mathbf{b});
$$

$$
\sigma_z = p\,\Big\{-{}^1\!/_2 + {}^1\!/_4\,\frac{z}{h}\Big(\frac{z^2}{h^2} - 3\Big)\Big\}
$$

$$
\tau = {}^3\!/_8\,\frac{p}{h^3}\,r\,(h^2 - z^2) \quad \text{und} \quad {}^3\!/_8\,\frac{p\,b^2}{h^3}\,\frac{z^2 - h^2}{r}
$$

---

[1]) »Drang und Zwang« 1, S. 187 f.

Die auf »und« folgenden Glieder sind durch die überlagerte dritte Hauptlösung bedingt; diese »Scherkraftglieder« können bei einem gegen die Plattendicke $2h$ kleinen Radius b des Innenrandes den übrigen gegenüber vernachlässigt werden. Als maximale Spannungen ergeben sich für $z = -h$:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_r &= \frac{3p}{32h^2}\Big\{(3+\sigma)(a^2+b^2-r^2) - (3+\sigma)\frac{a^2b^2}{r^2} + 4(1+\sigma)\frac{b^4}{a^2-b^2}\lg\frac{a}{b}\frac{a^2}{r^2} \\ &\quad - 4(1+\sigma)b^2\frac{a^2\lg a - b^2\lg b}{a^2-b^2} + 4(1+\sigma)b^2\lg r + {}^8/_{15}(2-\sigma)\frac{b^2h^2}{r^2} + {}^8/_{15}(2+\sigma)h^2\Big\} \\ \bar{\sigma}_\vartheta &= \frac{3p}{32h^2}\Big\{(3+\sigma)\left(a^2+\frac{a^2b^2}{r^2}\right) + (5\sigma-1)b^2 - (1+3\sigma)r^2 - 4(1+\sigma)\frac{b^4}{a^2-b^2}\lg\frac{a}{b}\frac{a^2}{r^2} \\ &\quad - 4(1+\sigma)b^2\frac{a^2\lg a - b^2\lg b}{a^2-b^2} + 4(1+\sigma)b^2\lg r - {}^8/_{15}(2-\sigma)\frac{b^2h^2}{r^2} + {}^8/_{15}(2+\sigma)h^2\Big\}\end{aligned} \qquad (23).$$

Diese Werte decken sich mit den von A. und L. Föppl[1]) nach der üblichen Näherungstheorie für Platten errechneten Werten bis auf je die beiden letzten hier gefundenen (dort fehlenden) Glieder, die also als die durch die strenge Elastizitätstheorie ermittelten Korrektionsglieder anzusprechen sind. Für den Innenrand $r = b$ nimmt die Radialspannung nach der Näherungstheorie den Wert 0, nach unserer Formel den Betrag $\frac{p}{5}$ (unten und oben natürlich mit entgegengesetztem Zeichen) an, der praktisch schon angesichts der größeren σ_z-Werte als bedeutungslos zu bezeichnen ist und überdies infolge der Anwendung des Saint-Venautschen Prinzips keinen Anspruch auf Genauigkeit erhebt.

Die Ringspannung hat für $r = b$ ihren Größtwert:

$$(\sigma_\vartheta)_{\max} = \frac{3p}{32h^2}\Big\{(3+\sigma)\,2a^2 - 2(1-\sigma)b^2 - 8(1+\sigma)\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\lg\frac{a}{b}\Big\} + \frac{\sigma}{10}p \qquad (24).$$

Wählen wir beispielsweise $\sigma = 0{,}3$, $b = h = \frac{a}{e^2}$, wo $e = 2{,}71828$, so nimmt das erste Glied den Betrag $33{,}78\,p$, das zweite den Wert $-0{,}13\,p$, das dritte ungefähr den Betrag $-2p$ an, während das letzte Glied nur den Betrag $0{,}03p$ erhält, der gegenüber dem führenden ersten Glied ohne weiteres vernachlässigt werden kann. Soweit die Abschätzung der maximalen Spannungen in Frage kommt, wird also die Näherungstheorie im Falle der gleichmäßig belasteten Kreisringplatte bestätigt. Insbesondere erhalten wir für unbegrenzt abnehmendes b:

$$(\sigma_\vartheta)_{\max} = \frac{3p}{32h^2}(3+\sigma)\,2a^2 + \frac{\sigma}{10}p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24'),$$

also einen Wert, der genau gleich dem Doppelten der für die gleichmäßig belastete volle Kreisplatte erhaltenen Maximalspannung (9) ist, wenn in beiden Fällen von dem Korrektionsgliede abgesehen wird: die inneren Ringspannungen für die mit einer feinen zentrischen Durchbohrung versehene gleichförmig belastete Kreisplatte sind doppelt so groß wie diejenigen bei der lochlosen Kreisplatte[2]).

Wir ziehen aus den Formeln (22a), (22b) noch einige Folgerungen zur Prüfung der Annahmen und Gleichungen der üblichen Näherungstheorie der Plattenbiegung (vergl. A. E. H. Love, § 313; A. u. L. Föppl, §§ 17, 18). Der Ausdruck w, den man erhält, wenn man $z = 0$ in u_z einsetzt, genügt der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) = -\frac{p}{D};$$

die von der Näherungstheorie benutzte Differentialgleichung für die Mittelfläche der verbogenen Platte wird also im vorliegenden Fall bestätigt. Für die achsenparallelen Fasern der Platte nimmt die Näherungstheorie an, daß sie geradlinig und senkrecht zur verbogenen Mittelfläche bleiben. Tatsächlich nehmen sie, wie die Formeln (22a)

---

[1]) a. a. O. § 29, Formel (117), wo die ganze Plattendicke mit h bezeichnet und $\sigma = \frac{1}{m}$ gesetzt ist.

[2]) A. u. L. Föppl, a. a. O., sprechen infolge eines Versehens beim Vergleich der Koeffizienten ihrer Formeln (99) und (118) von einer ungefähren Verdoppelung.

für $r =$ konst. zeigen, eine gewisse Schiefstellung und Krümmung an. In u_r liefern nur die Glieder

$$(u_r) = \frac{pr}{E}\left\{ {}^3/_{40}\,\frac{z}{h}\,(2 + 9\,\sigma - \sigma^2) - {}^1/_8\,\frac{z^3}{h^3}\,(2 + \sigma - \sigma^2)\right\}$$
$$+ \frac{p}{8}\,\frac{b^2}{Eh^3}\,(2 + \sigma - \sigma^2)\left[\frac{z^3}{r} - \frac{h^2}{5}\,\frac{3z}{r}\right] \quad . \quad . \quad (25)$$

einen Beitrag zur Schubspannung. Die übrigen Glieder stellen zunächst die achsenparallelen Fasern senkrecht zur verbogenen Mittelfläche. Die in z linearen Bestandteile von (25) in Verbindung mit den entsprechenden von z unabhängigen Gliedern in u_z bedingen sodann eine Schiefstellung der Fasern vom Betrage $\frac{3}{8\mu}\,\frac{p}{h}\left(r - \frac{b^2}{r}\right)$, durch die die untere Hälfte der Fasern gegen die z-Achse zurückgedreht wird; eine Schiefstellung, die am Außenrande der Ringplatte ihren Größtwert $\frac{3}{8\mu}\,\frac{p}{h}\,\frac{a^2 - b^2}{a}$ und am Innenrand den Wert 0 hat. Die mit z^3 proportionalen Glieder in (25) bedingen eine S-förmige Gestalt der verzerrten Fasern, wobei die Wendetangente in $z = 0$ durch die oben erörterte Schiefstellung gegeben ist und die Krümmung oben wie unten der Normalen zugewendet ist. Alles in allem gilt also für die achsenparallelen Fasern der gleichförmig belasteten Kreisringplatte wesentlich dasselbe wie für die Verzerrung der vertikalen Fasern des durch Scherkräfte beanspruchten schmalen rechteckigen Balkens mit horizontaler Achse. Das von der Näherungstheorie vorausgesetzte Geradlinigbleiben dieser Fasern gilt in erster Annäherung, insofern die Abweichung sich erst durch Glieder dritter Ordnung ausdrückt. Zu bemerken ist, daß durch Berücksichtigung der vertikalen Verschiebungskomponente u_z die S-Gestalt der Fasern in eine unsymmetrische abgewandelt wird. Die Mittelfläche der Platte erfährt, entsprechend dem Gliede $\frac{\sigma}{E}\,\frac{pr}{2}$ in u_r, eine gleichförmige Dehnung, wie sie dem auf ihr lastenden Druck $\frac{p}{2}$ zugeordnet sein würde; die Schichtflächen $z =$ konst. blättern schwach auf, entsprechend den mit z^2 proportionalen Gliedern in u_z.

Eine große Rolle spielt in der Näherungstheorie die Voraussetzung, daß die auf zwei zueinander senkrechte x, y-Richtungen bezogenen Biegungsmomente M_1, M_2 den Krümmungselementen $k_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $k_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ proportional sind:

$$M_1 = -D\,(k_1 + \sigma k_2); \qquad M_2 = -D\,(k_2 + \sigma k_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Bilden wir die Ausdrücke k_1, k_2 für einen Schnitt $r =$ konst. und einen dazu senkrechten Schnitt[1]) und die entsprechenden Spannungsmomente nach unseren Formeln (22a), (22b), so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -D\,(k_1 + \sigma k_2) + \left[\frac{8 + \sigma + \sigma^2}{1 - \sigma} + (8 + \sigma)\,\frac{b^2}{r^2}\right]\frac{ph^2}{20} \\ M_2 &= -D\,(k_2 + \sigma k_1) + \left[\frac{8 + \sigma + \sigma^2}{1 - \sigma} - (8 + \sigma)\,\frac{b^2}{r^2}\right]\frac{ph^2}{20} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (26^*).$$

Bedenkt man, daß das Biegungsmoment ph^2 aus Randspannungen σ_i resultieren würde, die nach drm Gesetz $\sigma_i = {}^3/_2\,p\,\frac{z}{h}$ über den Schnitt i verteilt sind, so sieht man, daß die Korrektionsglieder, um die sich die Formeln (26*) von (26) unterscheiden, bei geringer Plattendicke unbeträchtlich sind.

4. Anwendung krummliniger Koordinaten. Sphäroid. Zur Lösung der Randwertaufgabe und zur Gewinnung wichtiger partikulärer Lösungen verspricht bei Körpern, deren Begrenzung nicht von Ebenen $z =$ konst. und Zylinderflächen $r =$ konst. gebildet wird, die Anwendung geeigneter rechtwinkliger, krummliniger Koordinaten α, β[2]) Erfolg, sofern man in ihnen den Bedingungen für die Oberflächenspannungen oder -verschiebungen eine einfache Gestalt zu geben vermag. Führen wir die Differentialparameter

---

[1]) Vergl. den vom Koordinatensystem losgelösten Ansatz von A. E. H. Love, a. a. O., § 298.

[2]) Vergl. Love, § 19 ff., § 96.

$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right)^2}$, $h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial r}\right)^2}$ ein, so treten an Stelle von (4) die Grundgleichungen

$$\frac{r h_1}{h_2}\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha} - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial\beta}(r\bar{\omega}) = 0; \quad \frac{r h_2}{h_1}\frac{\partial\Delta}{\partial\beta} + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha}(r\bar{\omega}) = 0 \quad . \quad . \quad (27).$$

Daß Δ und $\frac{\mu}{\lambda+2\mu} r\bar{\omega}$ die Eigenschaften einer achsensymmetrischen Potentialfunktion φ und der dazu assoziierten Strömungsfunktion ψ besitzen, kommt jetzt in den Differentialgleichungen

$$\nabla\Delta = \frac{h_1 h_2}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_1 r}{h_2}\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_2 r}{h_1}\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\right)\right\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_1}{h_2 r}\frac{\partial(r\bar{\omega})}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_2}{h_1 r}\frac{\partial(r\bar{\omega})}{\partial\beta}\right) = 0 \quad (28)$$

zum Ausdruck. Für den besonders wichtigen Fall »thermometrischer Koordinaten[1]), wo $\nabla\alpha = \nabla\beta = 0$, $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_1 r}{h_2}\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_2 r}{h_1}\right) = 0$, gehen diese Gleichungen über in

$$h_1^2\frac{\partial^2\Delta}{\partial\alpha^2} + h_2^2\frac{\partial^2\Delta}{\partial\beta^2} = 0, \quad h_1^2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r\bar{\omega})}{\partial\alpha}\right) + h_2^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r\bar{\omega})}{\partial\beta}\right) = 0 \quad . \quad (29),$$

und die Gleichungen (27) lassen sich auf zweifache Weise als Integrabilitätsbedingungen deuten:

$$\frac{h_2 r}{h_1}\Delta = \frac{\partial V_1}{\partial\alpha}; \quad \frac{\mu}{\lambda+2\mu}2r\bar{\omega} = -\frac{\partial V_1}{\partial\beta} \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{\lambda+2\mu}2r\bar{\omega} = \frac{\partial W_1}{\partial\alpha}; \quad \frac{h_1 r}{h_2}\Delta = \frac{\partial W_1}{\partial\beta} \quad (30).$$

Die durch Verknüpfung hieraus entstehenden Beziehungen

$$\frac{\partial W_1}{\partial\alpha} = -\frac{\partial V_1}{\partial\beta}; \quad h_2^2\frac{\partial W_1}{\partial\beta} = h_1^2\frac{\partial V_1}{\partial\alpha}$$

ergeben Differentialgleichungen für V_1 und W_1, die von denjenigen für φ und ψ abweichen, liefern aber andererseits, als Integrabilitätsbedingungen gelesen, die neuen Formeln:

$$V_1 = \frac{\partial V_2}{\partial\alpha}; \quad W_1 = -\frac{\partial V_2}{\partial\beta} \quad \text{und} \quad W_1 = \frac{h_1}{h_2 r}\frac{\partial W_2}{\partial\alpha}; \quad V_1 = \frac{h_2}{h_1 r}\frac{\partial W_2}{\partial\beta} \quad . \quad . \quad (31).$$

Die Verknüpfung dieser Formeln zeigt, daß V_2, W_2 wiederum den für φ, ψ geltenden Differentialgleichungen (29) genügen. In dieser Weise würde man eine ganze Reihe von erzeugenden Funktionen V_n, W_n aufstellen können, die abwechselnd nach dem Schema (30) (31) auseinander hervorgehen und von denen die mit geraden Indices versehenen Mitglieder den Gleichungen (29), die mit ungeraden Indices versehenen Mitglieder einem etwas davon abweichenden Gleichungspaar genügen. Wichtig ist, daß man aus einer beliebigen harmonischen Funktion V_2 auf dem Wege über die Formeln (31) und (30) eine achsensymmetrische Potentialfunktion φ (oder φ_1 usw.) und die zu ihr assoziierte Strömungsfunktion ψ (oder ψ_1 usw.), ausgedrückt in rechtwinkligen, krummlinigen thermometrischen Koordinaten α, β herleiten kann.

Beachten wir die Vektoreigenschaft des Gradienten einer Funktion, so läßt sich aus (7) ohne weiteres für unser Elastizitätsproblem folgende Lösung in rechtwinkligen krummlinigen Koordinaten gewinnen:

$$\frac{u_\alpha}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial\alpha} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\psi_1}{r}\frac{\cos(n_\alpha, r)}{h_1}, \quad \frac{u_\beta}{h_2} = \frac{\partial f}{\partial\beta} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\psi_1}{r}\frac{\cos(n_\beta, r)}{h_2}$$
(32),

wo u_α, u_β die Verschiebungskomponenten, n_α, n_β die Normalen der Linien α = konst., β = konst. im Sinne wachsender α, β-Werte. Da nun $\cos(n_\alpha, r) = \frac{\partial\alpha}{\partial r} : h_1 = h_1\frac{\partial r}{\partial\alpha}$, $\cos(n_\beta, r) = \frac{\partial\beta}{\partial r} : h_2 = h_2\frac{\partial r}{\partial\beta}$, so gehen die Gleichungen (32) über in

$$\frac{u_\alpha}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial\alpha} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\psi_1\frac{\partial \lg r}{\partial\alpha}, \quad \frac{u_\beta}{h_2} = \frac{\partial f}{\partial\beta} - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\psi_1\frac{\partial \lg r}{\partial\beta} \quad (32'),$$

[1]) Vergl. W. E. Byerly, Fourier's series and spherical harmonics, S. 238 ff.

eine Lösungsdarstellung, die auch unmittelbar zu verifizieren ist, insofern durch Einsetzen in die den Gl. (3) entsprechenden Formeln (s. Love, § 21)

$$\Delta = -\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\nabla\psi_1 + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{h_1 h_2}{r}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha}\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial r}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial r}{\partial\beta}\right]$$

$$= -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r};$$

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu}2r\tilde{\omega} = r h_1 h_2\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\beta} - \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right] = h_1 h_2\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha}\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial\beta}{\partial z}\right] = \frac{\partial\psi_1}{\partial z},$$

also die assoziierten Funktionen φ, ψ entstehen. Unter f haben wir in (32′) irgend eine achsensymmetrische Potentialfunktion, unter ψ_1 irgend eine achsensymmetrische Strömungsfunktion zu verstehen.

Als Beispiel behandeln wir das verlängerte Rotationsellipsoid, wie es etwa bei der Untersuchung des von A. und L. Föppl[1]) ins Auge gefaßten Körpers von faßartiger Gestalt heranzuziehen wäre. Von den rechtwinkligen Parallelkoordinaten x, y, z führt folgender Ansatz auf thermometrische sphäroidische Koordinaten α, β, ϑ:

$$x = b\,\mathfrak{Cosec}\,\alpha\;\mathfrak{Sec}\,\beta\cos\vartheta;\quad y = b\,\mathfrak{Cosec}\,\alpha\;\mathfrak{Sec}\,\beta\sin\vartheta;\quad z = b\,\mathfrak{Cotg}\,\alpha\;\mathfrak{Tg}\,\beta \quad . \quad (33).$$

Die Flächen $\alpha = $ konst. sind verlängerte Rotationsellipsoide, deren in die z-Achse fallende Hauptachse gleich $2b\,\mathfrak{Cotg}\,\alpha$ und deren Nebenachse gleich $2b\,\mathfrak{Cosec}\,\alpha$ ist; die Flächen $\beta = $ konst. sind zweischalige Umdrehungshyperboloide, deren Hauptachse gleich $b\,\mathfrak{Tg}\,\beta$ und deren Nebenachse gleich $b\,\mathfrak{Sec}\,\beta$ ist. Die Ellipsoide haben als Extremfälle: für $\alpha = 0$ die Kugel mit unendlich großem Radius, für $\alpha = \infty$ die von $z = \pm b$ begrenzte Strecke der z-Achse. Von den Hyperboloiden fällt die Ausartung $\beta = 0$ mit der doppelt zählenden xy-Ebene zusammen, die Ausartung $\beta = \pm\infty$ mit der z-Achse ohne den von $z = \pm b$ begrenzten Abschnitt, und im allgemeinen entsprechen positiven β-Werten die durch positive z charakterisierten Schalen, negativen β-Werten die anderen Schalen der Hyperboloide. Die zugehörigen Differentialparameter werden

$$h_1 = \frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta}{b\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cos}^2\beta}};\quad h_2 = \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}^2\beta}{b\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cos}^2\beta}};\quad \frac{1}{r} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta}{b}.$$

Die Laplacesche Gleichung für eine von ϑ unabhängige Funktion f nimmt die Gestalt an

$$\mathfrak{Sin}^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + \mathfrak{Cos}^2\beta\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$

und eine wichtige Lösung derselben läßt sich mit Hilfe der Legendreschen Polynome P_m in folgender Form ausdrücken

$$f(\alpha, \beta) = P_m(u)\,P_m(v) \quad . \quad . \quad . \quad (35),$$

wo $u = \mathfrak{Cotg}\,\alpha$, $v = \mathfrak{Tg}\,\beta$. Die ersten Glieder des Lösungssystems (32′) gehen damit über in

$$\frac{u_\alpha}{h_1} = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\alpha}P_m'(u)\,P_m(v);\quad \frac{u_\beta}{h_2} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}^4\beta}P_m(u)\,P_m'(v) \quad . \quad . \quad . \quad (36),$$

und als zugehöriges Deformationssystem ergibt sich

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha = {} & \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta}{b^2(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cos}^2\beta)}\big[-\mathfrak{Cos}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + 2\,\mathfrak{Cos}^2\beta)\,P_m'(u)\,P_m(v) \\
& - \mathfrak{Sin}^3\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,P_m(u)\,P_m'(v) + \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta\,m\,(m+1)\,P_m(u)\,P_m(v)\big]; \\
\varepsilon_\beta = {} & \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta}{b^2(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cos}^2\beta)}\big[\mathfrak{Cos}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}^3\beta\,P_m'(u)\,P_m(v) \\
& + \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,(2\,\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cos}^2\beta)\,P_m(u)\,P_m'(v) \\
& - \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta\,m\,(m+1)\,P_m(u)\,P_m(v)\big]; \qquad (37). \\
\varepsilon_\vartheta = {} & \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta}{b^2(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cos}^2\beta)}\big[\mathfrak{Cos}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta\,P_m'(u)\,P_m(v) - \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,P_m(u)\,P_m'(v)\big]; \\
\gamma_{\alpha\beta} = {} & \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta}{b^2(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cos}^2\beta)}\Big[-2\,P_m'(u)\,P_m'(v) \\
& - \frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha\,\mathfrak{Sin}\,2\beta}{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cos}^2\beta}P_m'(u)\,P_m(v) + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\alpha\,\mathfrak{Cos}^2\beta}{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cos}^2\beta}P_m(u)\,P_m'(v)\Big]
\end{aligned}$$

[1]) a. a. O. § 82.

[2]) W. E. Byerly, a. a. O. S. 250.

Um die von ψ_1 abhängenden Bestandteile des Lösungssystem (32′) zu gewinnen, nehmen wir $V_2 = \frac{b}{m\,(m+1)} P_m(u)\, P_m(v)$ und verschaffen uns auf dem Wege über die Formeln (31) und (30) eine achsensymmetrische Potentialfunktion φ_1 und die zugehörige Strömungsfunktion ψ_1. Es ergibt sich:

$$\varphi_1 = P_m(u)\, P_m(v); \quad \psi_1 = \frac{b}{m\,(m+1)\, \mathfrak{Sin}^2\alpha\, \mathfrak{Cof}^2\beta} P_m'(u)\, P_m'(v).$$

Die von ψ_1 abhängenden Glieder des Lösungssystems (32′) gehen somit über in

$$\left.\begin{aligned}\frac{u_\alpha}{h_1} &= \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \frac{b}{\mathfrak{Sin}^2\alpha\, \mathfrak{Cof}^2\beta} P_m(u)\, P_m'(v) - \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \frac{b\, \mathfrak{Cotg}\,\alpha}{m\,(m+1)\, \mathfrak{Sin}^2\alpha\, \mathfrak{Cof}^2\beta} P_m'(u)\, P_m'(v);\\ \frac{u_\beta}{h_2} &= \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \frac{b}{\mathfrak{Sin}^2\alpha\, \mathfrak{Cof}^2\beta} P_m'(u)\, P_m(v) - \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \frac{b\, \mathfrak{Tg}\,\beta}{m\,(m+1)\, \mathfrak{Sin}^2\alpha\, \mathfrak{Cof}^2\beta} P_m'(u)\, P_m'(v)\end{aligned}\right\} \quad (38).$$

Die entsprechenden Werte von Δ und $\frac{\mu}{\lambda+2\mu} 2\, r\, \tilde{\omega}$ werden

$$\Delta = \frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha\, \mathfrak{Cof}^2\beta}{b\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta)} \left[\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\alpha} P_m'(u)\, v\, P_m(v) + \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\beta} u\, P_m(u)\, P_m'(v)\right];$$

$$\frac{\mu}{\lambda+2\mu} 2\, r\, \tilde{\omega} = \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta} \left[-u\, P_m'(u)\, P_m(v) + P_m(u)\, v\, P_m'(v)\right].$$

Das zugehörige Deformationssystem wird

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha = \frac{1}{b\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta)} \Bigg\{ & P_m(u)\, P_m'(v) \left[\frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\,(2\, \mathfrak{Cof}^2\beta + \mathfrak{Sin}^2\alpha)}{2\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta)} + {}^1/_2\, \mathfrak{Sin}\, 2\alpha\right]\\ & - P_m'(u)\, P_m(v) \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha\, \mathfrak{Sin}\, 2\beta}{2\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta)} + P_m'(u)\, P_m'(v) \Bigg[-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\\ & + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \frac{-\mathfrak{Cof}^2\alpha\,(2\, \mathfrak{Cof}^2\beta + \mathfrak{Sin}^2\alpha) + \mathfrak{Sin}^2\alpha\, \mathfrak{Sin}^2\beta + \mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta}{m\,(m+1)\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta)}\Bigg]\Bigg\};\\ \varepsilon_\beta = \frac{1}{b\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta)} \Bigg\{ & P_m'(u)\, P_m(v) \left[\frac{\lambda+\mu}{2\mu} \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\beta\,(2\, \mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta)}{2\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta)} + {}^1/_2\, \mathfrak{Sin}\, 2\beta\right]\\ & - P_m(u)\, P_m'(v) \frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha\, \mathfrak{Cof}^2\beta}{2\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta} + P_m'(u)\, P_m'(v) \Bigg[\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\\ & + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \frac{-\mathfrak{Sin}^2\beta\,(2\, \mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta) + \mathfrak{Cof}^2\alpha\, \mathfrak{Cof}^2\beta - \mathfrak{Sin}^2\alpha - \mathfrak{Cof}^2\beta}{m\,(m+1)\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta)}\Bigg]\Bigg\};\\ \varepsilon_\vartheta = \frac{1}{b\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta)} \Bigg\{ & - P_m(u)\, P_m'(v) \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\, {}^1/_2\, \mathfrak{Sin}\, 2\alpha\\ & - P_m'(u)\, P_m(v) \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\, {}^1/_2\, \mathfrak{Sin}\, 2\beta + P_m'(u)\, P_m'(v) \frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta}{m\,(m+1)} \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\Bigg\};\\ \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{b\,(\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta} \Bigg\{ & - \frac{\lambda+\mu}{\mu} m\,(m+1)\, P_m(u)\, P_m(v)\, \mathfrak{Sin}\,\alpha\, \mathfrak{Cof}\,\beta\\ & - \frac{2\,(\lambda+2\mu)}{\mu} \frac{P_m'(u)\, P_m'(v)}{m\,(m+1)} \mathfrak{Cof}\,\alpha\, \mathfrak{Sin}\,\beta\\ & + \left[\frac{\lambda+2\mu}{\mu} + \frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha}{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta}\right] P_m(u)\, P_m'(v)\, \mathfrak{Sin}\,\alpha\, \mathfrak{Sin}\,\beta\\ & + \left[\frac{\lambda+2\mu}{\mu} + \frac{\lambda+\mu}{\mu} \frac{\mathfrak{Cof}^2\beta}{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \mathfrak{Cof}^2\beta}\right] P_m'(u)\, P_m(v)\, \mathfrak{Cof}\,\alpha\, \mathfrak{Cof}\,\beta\Bigg\}\end{aligned} \quad (39).$$

Aus (37), (39) lassen sich die unserem Ansatz entsprechenden Spannungen berechnen. Ihre Form erscheint unhandlich für die Lösung der allgemeinen Randwertaufgabe, bei der die Randspannungen etwa durch Reihenentwicklungen nach Kugelflächenfunktionen gegeben sind. Doch wird sie zur Gewinnung partikularer Lösungen nützliche Dienste leisten können. 312

Über Spannung und elastische Deformation von unebenen Membranen.

Von **M. LAGALLY** in Dresden.

Zur Untersuchung des Spannungszustandes von unebenen Membranen und Blechen von geringer Biegungssteifigkeit verwendet man ein System von Gleichgewichtsbedingungen, das Beltrami[1]) und Lecornu[2]) für unausdehnbare Flächen aufgestellt haben; man tut das mit umsogrößerer Berechtigung, als diese Gleichgewichtsbedingungen, wie neuerdings Caldonazzo[3]) gezeigt hat, auch für dehnbare Flächen und für Spannungszustände aller Art, vor allem elastische, Giltigkeit haben. Im folgenden ist eine Methode entwickelt, die das Gleichgewichtsproblem für beliebige Flächen auf eine einzige Differentialgleichung zurückführt; und zwar auf die in der Geometrie vielfach untersuchte »charakteristische« Gleichung, mit der Weingarten das Problem der kleinen Verbiegungen einer Fläche behandelt. Dieser Zusammenhang zwischen den Deformationen einer Fläche und den in ihr möglichen Spannungszuständen war in den Grundzügen schon Lecornu bekannt und ist ein Sonderfall der bekannten Analogie zwischen Kräftesystemen und kleinen Verschiebungen; zur vollen Klarheit wurde er durch Blaschke[4]) gebracht, der in einer für eine Flächendeformation charakterischen Fläche, dem »Drehriß«, zugleich den Kräfteplan eines Spannungszustandes der Fläche erkannte. Die analytische Bestimmung der Kräftepläne ist das erste Ziel der folgenden Untersuchung; hierauf werden die bei elastischen Spannungszuständen auftretenden Verzerrungen und Verschiebungen bestimmt. Hierzu ist eine zweite Differentialgleichung zu integrieren, die mit der charakteristischen Gleichung in nahem Zusammenhang steht. Es gibt ausgedehnte Familien von Flächen, wovon die Regelflächen mit Einschluß der Flächen 2. Ordnung die wichtigsten sein dürften, für die sämtliche statische und kinematische Fragen beantwortet werden können. Gegenüber dem wohlbekannten ebenen Problem[5]) treten wesentliche Verschiedenheiten auf. In der Ebene kann ein Spannungszustand nur dann als elastisch aufgefaßt werden, wenn zwischen den Spannungskomponenten eine gewisse Beziehung besteht aus dem Grund, weil die elastisch deformierten Flächenelemente das zur Verfügung stehende ebene Gebiet gerade ausfüllen müssen. Auf krummen Flächen kann jeder Spannungszustand als elastisch gelten; die Flächenpunkte haben einen Freiheitsgrad mehr als man den Punkten der Ebene zubilligt und können durch eine Verschiebung in Richtung der Flächennormalen diejenige Verzerrung der Flächenelemente herbeiführen, welche dem elastischen Spannungszustand zukommt. So wird eine in einen ebenen Reifen gespannte Membran oder ein dünnes Blech wesentlich verschiedene Gleichgewichtszustände besitzen können, je nachdem man den ebenen Spannungszustand fordert oder infolge einer ursprünglich vorhandenen Störung ein Ausknicken aus der Ebene zuläßt.

1. Drehriß und Kräfteplan. Soll eine Fläche F, die vom Endpunkt eines Ortsvektors $\mathfrak{r}$ beschrieben wird, durch eine kleine Deformation derart in eine Fläche F^* mit Ortsvektor $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r} + \varepsilon\,\overline{\mathfrak{r}}$ übergeführt werden, daß das Linienelement-Quadrat $d\mathfrak{r}^{*2} = d\mathfrak{r}^2 + 2\,\varepsilon\, d\mathfrak{r}\cdot d\overline{\mathfrak{r}} + \varepsilon^2\, d\overline{\mathfrak{r}}^2$ sich höchstens um Größen 2. Ordnung von $d\mathfrak{r}^2$ unterscheidet (isometrische Deformation), so muß der für die Deformation maßgebende Vektor $\overline{\mathfrak{r}}$ so bestimmt worden, daß die Orthogonalitätsgleichung

$$d\mathfrak{r}\cdot d\overline{\mathfrak{r}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

erfüllt ist. $\overline{\mathfrak{r}}$ kann als Ortsvektor einer Fläche $\overline{F}$ aufgefaßt werden, die der Ausgangsfläche durch Orthogonatität der Elemente entspricht. Für das folgende von größerer Wichtigkeit als diese Orthogonalfläche selbst ist eine andere Fläche, der Drehriß F',

[1]) E. Beltrami, Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. Mem. R. Accad. delle science di Bologna, 1881, pp. 217 bis 265.

[2]) Lecornu, Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextendibles. Journal de école Polytechnique Cahier XLVIII.

[3]) B. Caldonazzo, Sulla meccanica delle superficie. Il monitore tecnico 1920.

[4]) W. Blaschke, Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen Haut. International Congress of Mathematicians Cambridge 1912.

[5]) Vergl. F. Klein und K. Wieghardt, Ueber Spannungsflächen und reziproke Diagramme. Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, 8. Bd., 1905.

der in folgender Weise erhalten wird[1]). Da entsprechende Flächenelemente von F und F^* (bis auf Größen höherer Ordnung) kongruent sind, können sie, von einer Verschiebung abgesehen, durch eine kleine Drehung in einander übergeführt werden. Bezeichnet man mit $\varepsilon\mathfrak{r}'$ den Vektor dieser Drehung, so ist die Verschiebung $\varepsilon\, d\bar{\mathfrak{r}}$, welche der Endpunkt eines in dem Flächenelement als Ortsvektor fungierenden Vektors $d\mathfrak{r}$ erfährt: $\varepsilon\, d\bar{\mathfrak{r}} = \varepsilon\mathfrak{r}' \times d\mathfrak{r}$. Der Vektor $\mathfrak{r}'$ ist gleichzeitig mit $d\bar{\mathfrak{r}}$ bestimmt; die Gleichung

$$d\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}' \times d\mathfrak{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

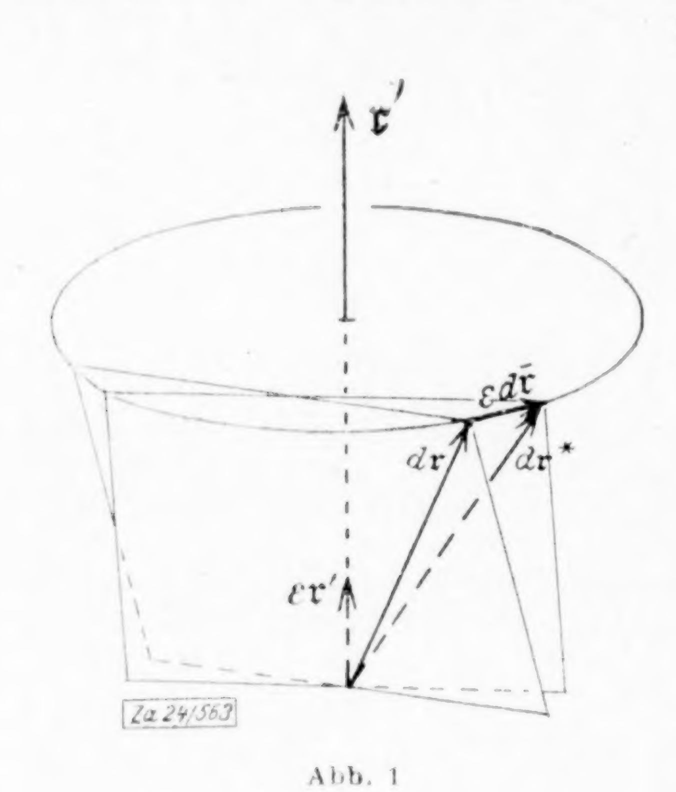


Abb. 1

sagt aus: Um zu einer Ausgangsfläche F alle Orthogonalflächen $\bar{F}$ und damit alle kleinen Verbiegungen von F zu finden, genügt es, den Vektor $\mathfrak{r}'$ so zu bestimmen, daß $\mathfrak{r}' \times d\mathfrak{r}$ ein totales Differential wird. Die von $\mathfrak{r}'$ als Ortsvektor beschriebene Fläche F' wird als Drehriß von F bezeichnet.

Für den Drehriß einer Fläche gilt das Reziprozitätsgesetz: wenn $\mathfrak{r}' \times d\mathfrak{r}$ ein totales Differential ist, so ist wegen $d(\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}') = d\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}' + \mathfrak{r} \times d\mathfrak{r}'$ auch $\mathfrak{r} \times d\mathfrak{r}'$ ein totales Differential. Also ist die Ausgangsfläche selbst ein Drehriß für jeden ihrer Drehrisse. Ferner gilt der Satz: Ausgangsfläche und Drehriß entsprechen sich durch parallele Normalen. Um ihn in Kürze zu beweisen, zerfällt man (2) durch Einführung Gaußscher Parameter u, v in die 2 Gleichungen $\bar{\mathfrak{r}}_u = \mathfrak{r}' \times \mathfrak{r}_u$; $\bar{\mathfrak{r}}_v = \mathfrak{r}' \times \mathfrak{r}_v$ (Die Indizes u, v bedeuten Differentiationen). Die Integrabilitätsbedingung dieser beiden Gleichungen ist $\mathfrak{r}_v' \times \mathfrak{r}_u = \mathfrak{r}_u' \times \mathfrak{r}_v$. Sie zeigt, daß die 4 Vektoren $\mathfrak{r}_u, \mathfrak{r}_v, \mathfrak{r}_u', \mathfrak{r}_v'$ komplanar, also die Tangentialebenen in entsprechenden Punkten von F und F' parallel sind.

Wenn nun in der Fläche F eine tangentiale Spannungsverteilung herrscht, für welche ohne Hinzutritt äußerer Kräfte außer etwa am Rande eines betrachteten Gebietes T der Fläche Gleichgewicht herrscht, so lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen folgendermaßen angeben. Grenzt man durch eine geschlossene Kurve C auf der Fläche ein in T gelegenes Teilgebiet ab, so muß die Resultierende der an C von außen her angreifenden Spannungen und ebenso die Resultierende der Spannungsmomente verschwinden. Also muß $\int_C d\mathfrak{s} = 0$ und $\int_C \mathfrak{r} \times d\mathfrak{s} = 0$ sein, wenn $d\mathfrak{s}$ die an dem Linienelement $d\mathfrak{r}$ der Randkurve angreifende Elementarspannung ist. Es muß also nicht nur $d\mathfrak{s}$ ein totales Differential und also $\mathfrak{s}$ eine vektorielle Ortsfunktion auf der Fläche sein, sondern auch $\mathfrak{r} \times d\mathfrak{s}$ und mithin auch $\mathfrak{s} \times d\mathfrak{r}$ ein totales Differential. Mithin erfüllt $\mathfrak{s}$ die Bedingungen, welche $\mathfrak{r}'$ bestimmt haben. Es können also die sämtlichen zu F gehörigen Drehrisse F' als die Kräftepläne aller in F möglichen tangentialen Spannungsverteilungen gedeutet werden[2]).

2. Charakteristische Funktion und charakteristische Gleichung. Zur Vereinfachung der Rechnung soll das Gaußsche Koordinatensystem u, v auf der Fläche als orthogonal vorausgesetzt werden. Bezeichnet man das Bogendifferential der Kurven $v =$ konst. mit dx, der Kurven $u =$ konst. mit dy, wobei dx und dy keine totalen Differentiale sind, so erhält man die Einheitsvektoren in Richtung der Tangenten von $v =$ konst. und $u =$ konst. als Richtungsableitungen: $\mathfrak{x} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x}$; $\mathfrak{y} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial y}$; ebenso wird zur Abkürzung $\bar{\mathfrak{x}} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial x}$; $\bar{\mathfrak{y}} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial y}$ eingeführt. $\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}$ sind keine Einheitsvektoren; $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sollen zusammen mit der Flächennormalen $\mathfrak{N}$ ein Rechtssystem bilden.

Gl. (1) zerfällt jetzt in

$$\mathfrak{x} \cdot \bar{\mathfrak{x}} = 0\,; \qquad \mathfrak{x} \cdot \bar{\mathfrak{y}} + \mathfrak{y} \cdot \bar{\mathfrak{x}} = 0\,; \qquad \mathfrak{y} \cdot \bar{\mathfrak{y}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

[1]) Siehe Note 4 auf S. 377.

[2]) Dieser Satz entspricht der Plückerschen Analogie zwischen Kräftesystemen und kleinen Bewegungen, welche den Kräften die Drehungen, den Kräftepaaren die Translationen zuordnet.

Hierzu wird nach Weingartens Vorgang eine charakteristische Funktion φ eingeführt:

$$\mathfrak{x}\cdot\bar{\mathfrak{y}} - \mathfrak{y}\cdot\bar{\mathfrak{x}} = 2\varphi\,; \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x}\cdot\bar{\mathfrak{y}} = \varphi\,; \quad \mathfrak{y}\cdot\bar{\mathfrak{x}} = -\varphi \quad \ldots \quad (4).$$

Sie ist, wie Volterra gezeigt hat, gleich der in die (negative) Normalenrichtung fallenden Komponente des Drehvektors. Zerlegt man nämlich wieder (2) in die beiden Gleichungen

$$\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{r}' \times \mathfrak{x}\,; \quad \bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{r}' \times \mathfrak{y} \quad \ldots \quad (5),$$

so ist

$$\varphi = \mathfrak{x}\cdot\bar{\mathfrak{y}} = [\mathfrak{x}\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{y}] = -\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{N} \quad \ldots \quad (6),$$

womit der Beweis erbracht ist; später wird auch die Tangentialkomponente des Drehrisses durch die charakteristische Funktion ausgedrückt werden.

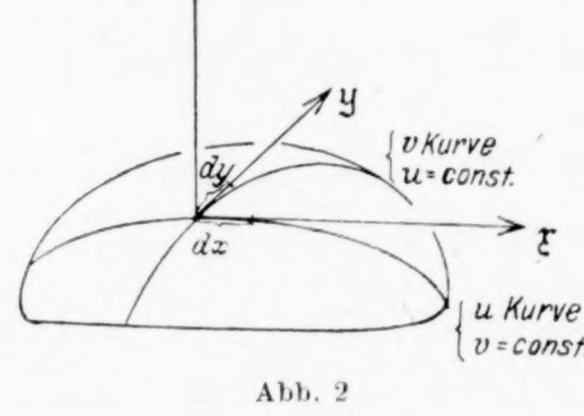


Abb. 2

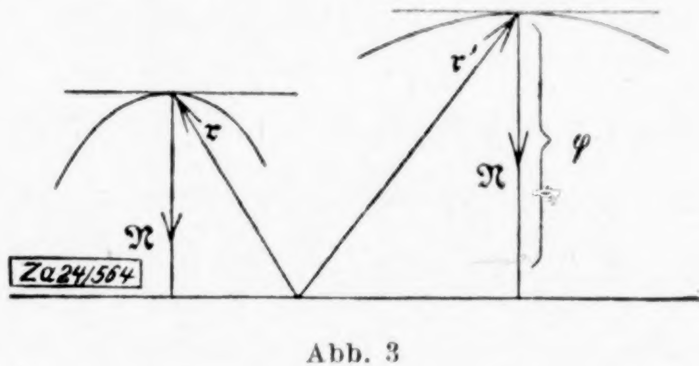


Abb. 3

Zunächst kann sie dazu verwendet werden, den zu einer Orthogonalfläche F gehörigen Drehriß F' zu finden. Nach (2) ist $\mathfrak{r}'\cdot d\bar{\mathfrak{r}} = 0$; der Drehvektor fällt also in die Normalenrichtung der Orthogonalfläche. Bildet man einen Vektor in dieser Richtung:

$$\bar{\mathfrak{x}} \times \bar{\mathfrak{y}} = (\mathfrak{r}' \times \mathfrak{x}) \times (\mathfrak{r}' \times \mathfrak{y}) = \mathfrak{r}'\,[\mathfrak{r}'\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}] = -\,\mathfrak{r}'\,\varphi\,,$$

so folgt

$$\mathfrak{r}' = -\frac{\bar{\mathfrak{x}} \times \bar{\mathfrak{y}}}{\varphi} \quad \ldots \quad (7).$$

Jetzt soll die charakteristische Gleichung, also die Differentialgleichung 2. Ordnung, welcher φ genügt, selbst aufgestellt werden; hierzu eliminiert man aus (3) und (4) $\bar{\mathfrak{r}}$, also $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$. Zu jedem Integral φ kann man dann nach (3) (4) (7) $\bar{\mathfrak{x}}$, $\bar{\mathfrak{y}}$ und $\mathfrak{r}'$, also die zugehörige Orthogonalfläche und den Drehriß ableiten. Um die auf der Vektorenrechnung begründeten natürlichen Methoden der Geometrie beibehalten zu können, mag zunächst ein Formelsystem angegeben werden, dessen Aufstellung in dieser Form (bis auf die Bezeichnung) man Burali Forti[1]) verdankt. Bezeichnet man die Normalkrümmung, geodätische Krümmung und geodätische Torsion einer Kurve $v =$ konst. mit N_1, G_1, T, die entsprechenden Größen einer Kurve $u =$ konst. mit N_2, G_2, $-T$, so haben die Richtungsänderungen der Kanten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{N}$ des begleitenden Dreikants beim Fortschreiten seines Scheitels auf der Fläche folgende Werte:

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \quad * \quad G_1\,\mathfrak{y} - N_1\,\mathfrak{N}\,; & \dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} = \quad * \quad - G_2\,\mathfrak{y} + T\,\mathfrak{N} \\
\dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = - G_1\,\mathfrak{x} \quad * \quad + T\,\mathfrak{N}\,; & \dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = \quad G_2\,\mathfrak{x} \quad * \quad - N_2\,\mathfrak{N} \\
\dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} = \quad N_1\,\mathfrak{x} - T\,\mathfrak{y} \quad * \,; & \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} = - T\,\mathfrak{x} + N_2\,\mathfrak{y} \quad *
\end{array}\right\} \quad . \; . \quad (8).$$

Zwischen den 5 Krümmungen bestehen 3 Relationen, die Gleichungen von Gauß und Codazzi:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial G_1}{\partial y} + \dfrac{\partial G_2}{\partial x} - G_1^{\,2} - G_2^{\,2} = N_1\,N_2 - T^2 \\
\dfrac{\partial N_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T}{\partial y} - 2\,G_1\,T = (N_2 - N_1)\,G_2 \\
\dfrac{\partial N_1}{\partial y} + \dfrac{\partial T}{\partial x} - 2\,G_2\,T = (N_1 - N_2)\,G_1
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (9).$$

[1]) Burali Forti, Fondamenti per la geometria differentiale col metodo vettoriale generale. Rendiconti del circolo matematico di Palermo XXXIII, 1912, S. 1 bis 40.

Die Gaußsche und mittlere Krümmung K und H haben die Werte

$$K = N_1 N_2 - T^2 ; \qquad 2H = N_1 + N_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9\text{a}).$$

Eine nicht zu übersehende Eigenschaft der in (8) und (9) auftretenden Richtungsdifferentialquotienten ist, daß bei Bildung von zweiten Differentialquotienten die Reihenfolge der Operationen nicht vertauscht werden darf. Vielmehr ist (unter Weglassung der zu differentierenden Funktion)

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = G_1 \frac{\partial}{\partial x} - G_2 \frac{\partial}{\partial y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10);$$

insbesondre folgt durch Anwendung dieser Gleichung auf $\bar{\mathfrak{r}}$:

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\mathfrak{y}}}{\partial x} = G_1 \bar{\mathfrak{x}} - G_2 \bar{\mathfrak{y}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Diese Relation ist von grundsätzlicher Bedeutung für die wirkliche Aufstellung der charakteristischen Gleichung; sie ermöglicht, aus den Gl. (3) und (4) $\mathfrak{x} \cdot \bar{\mathfrak{x}} = 0$; $\mathfrak{x} \cdot \bar{\mathfrak{y}} = \varphi$; $\mathfrak{y} \cdot \bar{\mathfrak{x}} = -\varphi$; $\mathfrak{y} \cdot \bar{\mathfrak{y}} = 0$ durch Differentialionsprozesse beliebig viele weitere, in $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ lineare Gleichungen abzuleiten. So erhält man zunächst:

$$\mathfrak{N} \cdot \bar{\mathfrak{x}} = \frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{N_1}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \qquad \mathfrak{N} \cdot \bar{\mathfrak{y}} = -\frac{N_2}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

sodann eine lineare Kombination dieser 6 Gleichungen, welche die Elimination von $\bar{\mathfrak{x}}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$ sofort auszuführen gestattet und die charakteristische Gleichung in folgender Form[1]) ergibt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - G_1\right)\left[\frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{N_1}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] + \left(\frac{\partial}{\partial x} - G_2\right)\left[\frac{N_2}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] + 2H\varphi = 0 \quad (12).$$

Zu jedem Integral φ liefern die sechs linearen Gleichungen die Werte

$$\bar{\mathfrak{x}} = -\varphi \mathfrak{y} + \left[\frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{N_1}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]\mathfrak{N}; \qquad \bar{\mathfrak{y}} = \varphi \mathfrak{x} - \left[\frac{N_2}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]\mathfrak{N} \quad (13),$$

und hieraus folgt nach (7) der Ortsvektor des Drehrisses

$$\mathfrak{r}' = -\varphi \mathfrak{N} - \left[\frac{N_2}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]\mathfrak{x} - \left[\frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{N_1}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]\mathfrak{y} \quad . \; . \; . \quad (14)$$

von dem bisher nur nach (6) die Normalkomponente bekannt war.

3. Elementar-Spannungen und Spannungstensor, Gleichgewichtsbedingungen.

Wichtiger als der Ortsvektor $\mathfrak{r}'$ des Drehrisses und die punktweise Zuordnung von Ausgangsfläche und Drehriß ist das gerichtete Linienelement $d\mathfrak{r}'$ des Drehrisses und seine Zuordnung zum Linienelement $d\mathfrak{r}$ der Fläche F; denn $d\mathfrak{r}'$ kann als die an $d\mathfrak{r}$ angreifende Elementarspannung bei einem tangentialen Spannungszustand von F gedeutet werden.

Aus (14) erhält man durch Differentiieren unter Berücksichtigung von (8)

$$\frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial x} = a_{11}\mathfrak{x} + a_{21}\mathfrak{y}; \qquad \frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial y} = a_{12}\mathfrak{x} + a_{22}\mathfrak{y} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (15).$$

Die Koeffezienten a_{ik} sollen später angegeben werden; wegen der parallelen Zuordnung entsprechender Flächenelemente von F und F' haben $\frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial x}$ und $\frac{\partial \mathfrak{r}'}{\partial y}$ keine Komponenten in Richtung $\mathfrak{N}$. Somit wird

$$d\mathfrak{r}' = (a_{11}\mathfrak{x} + a_{21}\mathfrak{y})\,dx + (a_{12}\mathfrak{x} + a_{22}\mathfrak{y})\,dy = (a_{11}\mathfrak{x}\mathfrak{x} + a_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + a_{21}\mathfrak{y}\mathfrak{x} + a_{22}\mathfrak{y}\mathfrak{y}) \cdot d\mathfrak{r}.$$

Damit ist zwischen den Linienelementen von Fläche und Drehriß, oder zwischen dem Linienelement $d\mathfrak{r}$ der Fläche F und der angreifenden Elementarspannung $d\mathfrak{s}$ eine affine Beziehung hergestellt:

$$d\mathfrak{r}' = \alpha \cdot d\mathfrak{r}; \qquad d\mathfrak{s} = \alpha \cdot d\mathfrak{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16),$$

wobei

$$\alpha = (a_{11}\mathfrak{x}\mathfrak{x} + a_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + a_{21}\mathfrak{y}\mathfrak{x} + a_{22}\mathfrak{y}\mathfrak{y}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16'),$$

der die Affinität vermittelnde Tensor ist.

Der Tensor α steht in engem Zusammenhang mit dem Spannungstensor. Bezeichnet man zunächst mit $\mathfrak{S} = \frac{d\mathfrak{s}}{|d\mathfrak{r}|}$ die reduzierte Spannung, mit $\mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{r}}{|d\mathfrak{r}|}$ die Richtung des Linien-

[1]) Vergl. Cesáro-Kowalewski, Vorlesungen über natürliche Geometrie, S. 253.

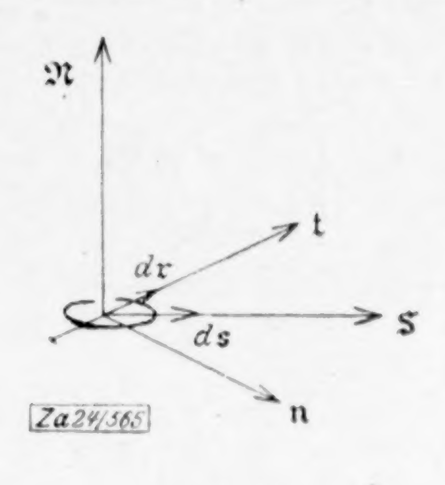


Abb. 4

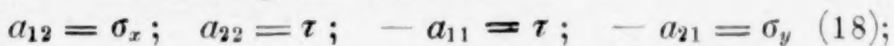
elements, an dem sie angreift, so folgt aus (16): $\mathfrak{S} = \alpha \cdot \mathfrak{t}$. Sodann ist es gebräuchlich, die reduzierte Spannung nicht dem Linienelement zuzuordnen, sondern der darauf senkrechten Normalenrichtung. Diese ist $\mathfrak{n} = \mathfrak{t} \times \mathfrak{N}$; also $\mathfrak{t} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{n}$ und

$$\mathfrak{S} = \alpha \cdot (\mathfrak{N} \times \mathfrak{n}) = (\alpha \times \mathfrak{N}) \cdot \mathfrak{n} = \sigma \cdot \mathfrak{n} \quad . \quad . \quad (17);$$

hier ist

$$\sigma = \alpha \times \mathfrak{N} = (a_{12}\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{x} - a_{11}\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{y} + a_{22}\, \mathfrak{y}\, \mathfrak{x} - a_{21}\, \mathfrak{y}\, \mathfrak{y}) \quad (17')$$

der Spannungstensor. Wählt man in (17) für $\mathfrak{n}$ die speziellen Werte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, so erhält man für $\mathfrak{S}$ die Werte $a_{12}\, \mathfrak{x} + a_{22}\, \mathfrak{y}$, bezw. $- a_{11}\, \mathfrak{x} - a_{21}\, \mathfrak{y}$. Daraus ergibt sich die mechanische Bedeutung der a_{ik}; es ist



$$a_{12} = \sigma_x\,; \quad a_{22} = \tau\,; \quad - a_{11} = \tau\,; \quad - a_{21} = \sigma_y \quad (18);$$

wenn σ_x und σ_y die reduzierten Normalspannungen, τ die reduzierte Schubspannung bedeutet. Schreibt man jetzt die in (15) eingeführten Größen ausführlich an, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x = a_{12} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{N_2}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] - G_2\left[\frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{N_1}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] + T\varphi \\
\sigma_y = -a_{21} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{N_1}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] + G_1\left[\frac{N_2}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] - T\varphi \\
\tau = a_{22} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{N_1}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] + G_2\left[\frac{N_2}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] - N_2\varphi \\
\tau = -a_{11} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{N_2}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] - G_1\left[\frac{T}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{N_1}{K}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] + N_1\varphi
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (19).$$

Gleichsetzung der beiden verschiedenen Ausdrücke für τ führt gerade auf die charakteristische Gl. (12); ihr Bestehen hat die Symmetrie des Spannungstensors zur Folge ($a_{22} = - a_{11}$). Außerdem kann man durch Elimination von φ aus (19) 3 verschiedene Gleichungen zwischen σ_x, σ_y, τ herstellen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - 2 G_1\, \tau - G_2\, (\sigma_x - \sigma_y) &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} - 2 G_2\, \tau - G_1\, (\sigma_y - \sigma_x) &= 0 \\
N_1\, \sigma_x + N_2\, \sigma_y - 2\, T\, \tau &= 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Das sind die Gleichgewichtsbedingungen für Tangentialspannungen, die Beltrami und Lecornu für unausdehnbare Flächen aufgestellt haben und deren Giltigkeit für Spannungszustände aller Art Caldonazzo bewiesen hat. An der neuen Ableitung ist das wesentliche die Integrationstheorie; die Gleichgewichtsbedingungen werden durch die in (19) angegebenen Ausdrücke für die reduzierten Spannungen identisch erfüllt, sobald φ der charakteristischen Gleichung (12) genügt. Auf die Integration dieser in geometrischen Untersuchungen viel behandelten Gleichung ist also das mechanische Problem zurückgeführt. — Wenn Flächenkräfte wirken, treten noch Störungsglieder auf der rechten Seite von (20) auf; dann ist zu den Spannungskomponenten (19) noch ein particuläres Integral von (20) hinzuzufügen, zu dessen Auffindung die allgemeine Methode nicht auszureichen scheint.

4. Verzerrungstensor; elastischer Spannungszustand. Wenn man jeden Punkt der Fläche F mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$, die man sich in eine Flächenschar eingebettet vorstellen mag, um einen kleinen Vektor $\mathfrak{q} = q_1\, \mathfrak{x} + q_2\, \mathfrak{y} + q_3\, \mathfrak{N}$ verschiebt, so wird die Verzerrung, die der Raum dabei erleidet, durch den Vektor $d\,\mathfrak{q} = d\mathfrak{r} \cdot \nabla\, \mathfrak{q}$ gemessen. Der Tensor

$$\nabla\, \mathfrak{q} = \left(\mathfrak{x}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{y}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{N}\frac{\partial}{\partial n}\right)(q_1\, \mathfrak{x} + q_2\, \mathfrak{y} + q_3\, \mathfrak{N})$$

ist der Tensor der Verzerrung mit Einschluß der Drehung, die das Raumelement erfährt; dessen symmetrischer Teil $\varepsilon = {}^1\!/_2\, (\nabla\, \mathfrak{q} + \mathfrak{q}\, \nabla)$ ist der reine Verzerrungstensor und bestimmend für die Dilatation. Führt man die Differentiationen in ε aus, so treten außer Komponenten in Richtung der Flächentangentialebene, die die Verzerrung des Flächenelements bestimmen, auch solche in Richtung der Normalen auf; ihr Wert ist hier ohne

Interesse, hängt von der Aenderung von $\mathfrak{q}$ in Richtung der Normalen ab und kann durch einfache Annahmen hierüber zu Null gemacht werden. Dann wird

$$\varepsilon = \left[\frac{\partial q_1}{\partial x} - q_2 G_1 + q_3 N_1\right] \mathfrak{x}\,\mathfrak{x} + \left[\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial q_2}{\partial x} + q_1 G_1 + q_2 G_2 - 2 q_3 T\right] \frac{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} + \mathfrak{y}\,\mathfrak{x}}{2} + \left[\frac{\partial q_2}{\partial y} - q_1 G_2 + q_3 N_2\right] \mathfrak{y}\,\mathfrak{y} \quad (21).$$

Damit sind die Komponenten der Flächenverzerrung gefunden:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial q_1}{\partial x} - q_2 G_1 + q_3 N_1 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial q_2}{\partial y} - q_1 G_2 + q_3 N_2 \\ \gamma &= \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial q_2}{\partial x} + q_1 G_1 + q_2 G_2 - 2 q_3 T \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Setzt man in der Fläche einen homogenen elastischen Spannungszustand voraus, wie das in einer Membran von geringer, gleichmäßiger Dicke der Fall sein wird, so gelten nach dem Hookschen Gesetz zwischen den Spannungs- und Verzerruugskomponenten die bekannten linearen Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu)\, \varepsilon_x + \lambda\, \varepsilon_y \\ \sigma_y &= \lambda\, \varepsilon_x + (\lambda + 2\mu)\, \varepsilon_y \\ \tau &= \mu\, \gamma \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

Dabei sind λ, μ die Laméschen Konstanten. Dann erhält man durch Elimination der Verzerrungskomponenten aus (22) (23) den folgenden Zusammenhang zwischen Spannung und elastischer Verschiebung:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial q_1}{\partial x} - q_2 G_1 + q_3 N_1\right] + \lambda \left[\frac{\partial q_2}{\partial y} - q_1 G_2 + q_3 N_2\right] \\ \sigma_y &= \lambda \left[\frac{\partial q_1}{\partial x} - q_2 G_1 + q_3 N_1\right] + (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial q_2}{\partial y} - q_1 G_2 + q_3 N_2\right] \\ \tau &= \mu \left[\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial q_2}{\partial x} + q_1 G_1 + q_2 G_2 - 2 q_3 T\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (24).$$

Diese Gleichungen sind eine Verallgemeinerurg der bekannten, in der Ebene geltenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial q_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial q_2}{\partial y} \\ \sigma_y &= \lambda \frac{\partial q_1}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial q_2}{\partial y} \\ \tau &= \mu \left[\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial q_2}{\partial x}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24').$$

Jedoch besteht ein wesentlicher Unterschied: In der Ebene sind σ_x, σ_y, τ durch nur 2 Größen q_1, q_2 ausgedrückt; es kann also ein Spannungszustand nur dann als elastischer aufgefaßt werden, wenn σ_x, σ_y, τ der durch Elimination von q_1, q_2 entstehenden Gleichung genügen, die etwa durch Einführung der Airyschen Spannungsfunktion auf die biharmonische Gleichung zurückgeführt werden kann. Bei jeder krummen Fläche jedoch ist die Zahl der Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ gleich der Zahl der Verschiebungskomponenten q_1, q_2, q_3; das System (24) bestimmt also zu jedem, von irgend einem Integral der charakteristischen Gleichung abhängigen Spannungzustand (19) eine Verschiebung, welche diesen Spannungszustand als elastischen aufzufassen gestattet. Die Verschiebung erfolgt nicht vollständig in der Fläche selbst, sondern besitzt eine Normalkomponente.

Das ebene Problem stellt also nicht einen Grenzfall, sondern einen Ausnahmefall dar. Spannung und Verzerrung einer in einen ebenen Reifen eingespannten Membran werden sich ändern, sowie eine geringe seitliche Deformation des Reifens eine räumliche Verschiebung der Membran und ein Ausknicken des Reifens möglich macht.

5. Berechnung der elastischen Verschiebungen. Die Gl. (24) geben zu einem bekannten Spannungszustand die zugehörige elastische Verschiebung $\mathfrak{q}$ nicht eindeutig, sondern als Integral eines nicht homogenen Systems von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Das homogene System würde die Verschiebungen ergeben, die zu einem spannungsfreien und also nach (23) auch verzerrungsfreien Zustand gehören, also die isometrischen Deformationen. Mithin erhält man die allgemeinste Deformation, welche einem gegebenen Spannungszustand entspricht, indem man eine von ihnen mit der allgemeinsten isometrischen Deformation überlagert.

Die analytische Bestimmung von $\mathfrak{q}$ hängt eng mit der charakteristischen Gleichung zusammen. Man bilde, entsprechend (1), $d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{q} = d\mathfrak{r} \cdot \nabla\mathfrak{q} \cdot d\mathfrak{r}$ und bemerke, daß diese quadratische Form von dem antisymmetrischen Teil des Tensors $\nabla\mathfrak{q}$ unabhängig ist; daß also $\nabla\mathfrak{q}$ durch seinen symmetrischen Teil ε ersetzt werden kann. Dann wird

$$d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{q} = d\mathfrak{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathfrak{r} = \varepsilon_x\, dx^2 + \gamma\, dx\, dy + \varepsilon_y\, dy^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Diese Gleichung kann ähnlich wie (1) durch eine verallgemeinerte charakteristische Funktion behandelt werden. Sie zerfällt zunächst in

$$\mathfrak{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial x} = \varepsilon_x; \qquad \mathfrak{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial y} + \mathfrak{y} \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial x} = \gamma; \qquad \mathfrak{y} \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial y} = \varepsilon_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Hierzu führt man eine Hilfsfunktion ψ ein durch

$$\mathfrak{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial y} - \mathfrak{y} \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial x} = 2\psi, \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial y} = \psi + \frac{\gamma}{2}; \qquad \mathfrak{y} \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial x} = -\psi + \frac{\gamma}{2} \quad (27)$$

und eliminiert aus (26) und (27) den Vektor $\mathfrak{q}$. Dann genügt ψ der Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - G_1\right)\left[\frac{T}{K}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{N_1}{K}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right] + \left(\frac{\partial}{\partial x} - G_2\right)\left[\frac{N_2}{K}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{T}{K}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right] + 2H\psi$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial y} - G_1\right)\left[\frac{T}{K}\alpha + \frac{N_1}{K}\beta\right] + \left(\frac{\partial}{\partial x} - G_2\right)\left[\frac{N_2}{K}\alpha + \frac{T}{K}\beta\right] + \left[(N_2 - N_1)\frac{\gamma}{2} + T(\varepsilon_y - \varepsilon_x)\right] \quad (28),$$

wo zur Abkürzung

$$\alpha = G_1(\varepsilon_y - \varepsilon_x) + G_2\gamma - {}^1/_2\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}; \qquad -\beta = G_2(\varepsilon_x - \varepsilon_y) + G_1\gamma - {}^1/_2\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x}$$

gesetzt ist. Ist ψ aus dieser verallgemeinerten charakteristischen Gleichung bestimmt, so erhält man, entsprechend (13)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial x} &= \varepsilon_x \mathfrak{x} + \left(\frac{\gamma}{2} - \psi\right)\mathfrak{y} + \left(\left[\frac{T}{K}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{N_1}{K}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right] - \left[\frac{T}{K}\alpha + \frac{N_1}{K}\beta\right]\right)\mathfrak{N} \\ \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial y} &= \left(\frac{\gamma}{2} + \psi\right)\mathfrak{x} + \varepsilon_y \mathfrak{y} + \left(\left[\frac{N_2}{K}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{T}{K}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right] - \left[\frac{N_2}{K}\alpha + \frac{T}{K}\beta\right]\right)\mathfrak{N} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

und hieraus $\mathfrak{q}$ selbst durch Integration eines totalen Differentials in Gaußschen Koordinaten.

Das wesentliche ist die Bestimmung des partikulären Integrals bei der Integration von (28). Ihm entspricht eine mit elastischer Verzerrung und elastischen Spannungen verbundene Deformation der Fläche, während das allgemeine Integral der verkürzten Gleichung die überlagerte isometrische Deformation gibt. Es gibt ausgedehnte Familien von Flächen, für die die charakteristische Gleichung vollständig integriert werden kann; z. B. die Regelflächen mit Einschluß der Flächen 2. Ordnung, sowie größere Klassen von Rotations- und Schraubenflächen; in diesen Fällen ist auch die Auffindung des partikulären Integrals in formaler Weise möglich. Wenn also die Spannungsverteilung bekannt ist, kann nicht nur die Verzerrung, sondern auch die elastische Verschiebung bestimmt werden. Die Methode reicht sogar weiter als die hier getroffenen Voraussetzungen; da die Bestimmung von $\mathfrak{q}$ in (28) nur von geometrischen Größen, den Krümmungen und Verzerrungen abhängt, nicht aber von Kräften, ist es gleichgiltig, ob die äußeren Kräfte, welche den Spannungszustand hervorbringen, nur am Rand oder auch im Innern des betrachteten Gebiets angreifen.

Die Knickung von Schraubenfedern.

Von **R. GRAMMEL** in Stuttgart.

Eine Schraubenfeder verhält sich gegen Druck oder Zug in Richtung ihrer Achse ungefähr wie ein Rundstab von gleicher Länge und gleichem Querdurchmesser, aber außerordentlich viel kleinerer Druck- und Zugsteifigkeit. Bei der Berechnung der Knicklast eines Stabes darf die von der Last verursachte Stabverkürzung stets unbedenklich außer Acht gelassen werden; bei Schraubenfedern ist diese Vernachlässigung nicht mehr statthaft. Ein einfacher Versuch zeigt, daß die Axialverkürzung der Feder von entscheidendem Einfluß auf den Knickvorgang ist. Es bereitet, nachdem das Biegungsgesetz für eine solche Feder aufgestellt ist (**1**), keine Schwierigkeiten, auch ihre Knicklast zu berechnen (**2**). Dabei bestätigt sich die merkwürdige und technisch bedeutungsvolle Tatsache [1]), daß, im Unterschied vom geraden Stabe, die Feder unter gewissen Umständen überhaupt keiner Knickung fähig ist. Ebenso wie der gerade Stab kann auch die Feder durch ein um die Spulenachse wirkendes Drillungsmoment zum Ausknicken gebracht werden, dessen Größe sofort für den allgemeineren Fall berechnet wird, daß die Feder möglicherweise zugleich einen Axialdruck oder -zug auszuhalten hat (**3**). Wieder im Unterschied vom geraden Stabe findet man dabei das überraschende Ergebnis, daß bei steigendem Axialdruck die Knickfestigkeit gegenüber einem Drillungsmoment unter gewissen Umständen nicht ab- sondern zunimmt. Besondere Aufmerksamkeit beansprucht bei Federn die Frage nach der dynamischen Knicksicherheit, die für den Fall der Längs- und Drehschwingungen in einer praktisch ausreichenden Näherung erledigt wird (**4**).

1. Die elastostatischen Grundlagen. Ein Draht von kreisförmigem Querschnitt mit dem Halbmesser a, dem Elastizitätsmodul E und dem Schubmodul G sei zu einer Schraubenfeder von n Windungen so verbogen, daß die Drahtachse eine Schraubenlinie vom Halbmesser r und so kleiner Ganghöhe h_0 bildet, daß die Theorie erster Ordnung [2]) statthaft ist (Vernachlässigung der Aenderung von r und n bei einer axialen Belastung, sowie des Einflusses der ursprünglichen Steigung $h_0/2\pi r$). Die Spule habe im spannungslosen Zustande die Länge $l_0\,(=n\,h_0)$, gespannt die Länge $l = l_0 - \Delta l$; sie empfange an ihren beiden Enden nur je eine Druckkraft P und möglicherweise ein Drillungsmoment M, deren Vektoren in die ursprünglich gerade Spulenachse fallen. Dann gilt für die Axialverkürzung der Spule

$$\Delta l = \frac{4\,l_0\,r^3}{a^4\,h_0\,G}\,P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und für ihren Verdrillungswinkel

$$\varphi = \frac{8\,l_0\,r}{a^4\,h_0\,E}\,M \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Wir setzen hier und im Folgenden stets voraus, daß während der Verformung der Feder benachbarte Drahtwindungen sich niemals berühren.

Wird die Spule gebogen, so muß die Neigung ψ der gekrümmten Spulenachse gegen eine in die ursprüngliche Spulenachse fallende x-Achse einer Gleichung von der Form gehorchen

$$\alpha\,\frac{d\psi}{dx} = N \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3),$$

wo N das Biegungsmoment und α ein Beiwert ist, den man als Biegungssteifigkeit bezeichnen kann.

Um diese Biegungssteifigkeit zu berechnen, denken wir uns aus der Feder eine einzelne Windung ABC (Abb. 1) herausgenommen. In der Theorie erster Ordnung dürfen wir die Biegung dieser Windung infolge des Momentpaares N so berechnen, als ob die Drahtachse vor der Biegung in einer Ebene läge, also statt einer Schraubenlinie einen Kreis bildete. Gegenüber der Drahtmitte B der Windung verschiebt sich der Anfangspunkt A bei der Biegung um eine gewisse Strecke Δs axial nach hinten, der

[1]) Einige der Ergebnisse von **2** sind in einer sehr beachtenswerten Arbeit, die namentlich der Berechnung der Knicksicherheit gewidmet ist, auf wesentlich anderem Wege auch schon von E. Hurlbrink, Zeitschr. d. V. d. Ing. 54 (1910), S. 138, gefunden worden.

[2]) Vgl. etwa die kritische Zusammenfassung bei C. Fischer, Die Schraubenfeder (Mitt. d. Preuß. Hauptstelle f. d. naturw. Unterr., Heft 4, Leipzig 1920).

Endpunkt C um ebensoviel nach vorn. Der Mittelpunkt O der Windung bleibt dabei an seiner alten Stelle, und so erkennt man aus einem Seitenriß (Abb. 2, die zwei aufeinanderfolgende, sich infolge der Steigung null ursprünglich deckende Windungen ABC und CDE zeigt), daß der Biegungswinkel $\Delta\psi$, der auf eine Windung entfällt, genau genug dargestellt wird durch $\Delta\psi = 2 \cdot \Delta s/r$. Auf eine Längeneinheit der Spulenachse kommen (wenn die Feder etwa schon gespannt ist, also nur noch die Länge l besitzt) n/l oder $l_0/h_0 l$ Windungen, und da $d\psi/dx$ den auf diese Längeneinheit bezogenen Biegungswinkel bedeutet, so ist

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{2 l_0}{h_0 l} \frac{\Delta s}{r}$$

und mithin gemäß (3) die Biegungssteifigkeit

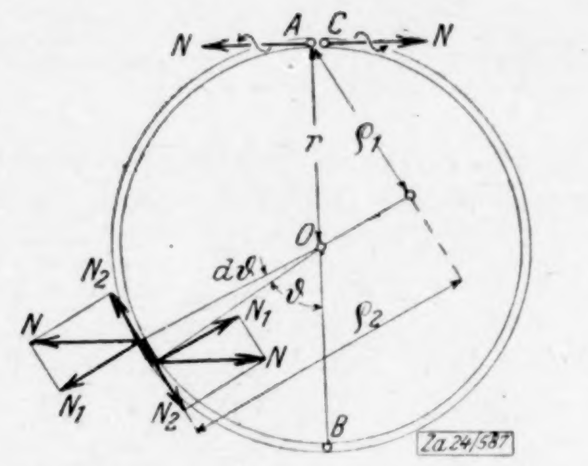


Abb. 1

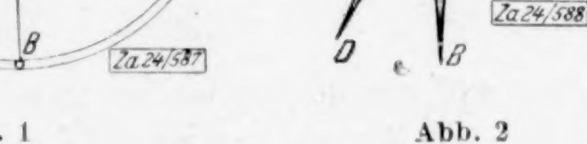


Abb. 2

$$\alpha = \frac{h_0 l r}{2 l_0} \frac{N}{\Delta s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Um Δs zu berechnen, greifen wir ein Drahtelement $d\vartheta$ (Abb. 1) heraus, das vom Punkte B aus gegen A hin den Winkelabstand ϑ besitzt, und zerlegen für dieses Element das Spulen-Biegungsmoment N in ein Draht-Biegungsmoment $N_1 = N \sin\vartheta$ und in ein Draht-Drillungsmoment $N_2 = N \cos\vartheta$. Nach dem Biegungsgesetz der Stäbe wird das Element $d\vartheta$ durch N_1 gebogen um den Winkel

$$d\chi = \frac{4 N_1}{\pi a^4 E} r \, d\vartheta.$$

Mit Hilfe des von A auf den Fahrstrahl des Azimutes ϑ gefällten Lotes $\varrho_1 = r \sin\vartheta$ berechnet sich also die von der Drahtbiegung herrührende axiale Verschiebung Δs_1 des Punktes A zu

$$\Delta s_1 = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \varrho_1 \, d\chi = \frac{2 r^2}{a^4 E} N.$$

Dasselbe Element $d\vartheta$ wird nach dem Drillungsgesetz der Stäbe um den Winkel

$$d\omega = \frac{2 N_2}{\pi a^4 G} r \, d\vartheta$$

gedrillt. Mit dem Abstande $\varrho_2 = r(1 + \cos\vartheta)$ des Fußpunktes des Lotes ϱ_1 vom Element $d\vartheta$ findet man hiernach die von der Drahtdrillung herrührende axiale Verschiebung Δs_2 des Punktes A zu

$$\Delta s_2 = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \varrho_2 \, d\omega = \frac{r^2}{a^4 G} N.$$

Setzt man die Summe $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2$ in (4) ein, so ergibt sich die Biegungssteifigkeit der Spule, nämlich[1])

$$\alpha = \frac{a^4 h_0 l}{2 l_0 r} \frac{E G}{E + 2G} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

2. Die Knicklast. Man kann jetzt in derselben Weise wie beim geraden Stabe zeigen, daß die Knicklast P_k der Feder nur von α und der Federlänge l_k im Augenblicke des Knickbeginns abhängt, nämlich so, daß

$$P_k l_k^2 = \varkappa^2 \pi^2 \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

sein muß, wo $\varkappa$ eine von der Art der Randbedingungen abhängige Zahl bedeutet, die dieselben Werte wie bei einem entsprechend gelagerten Stabe hat, also beispielsweise

$\varkappa = 1$ bei Lagerung beider Achsenenden in axial verschiebbaren Spitzen,
$\varkappa = 2$ bei Lagerung beider Achsenenden in axial verschiebbaren Einspannhülsen,
$\varkappa = 1/2$ bei einem eingespannten und einem freien Ende
(von den Knicklasten höherer Ordnung wird abgesehen).

---

[1]) Für den Fall $l = l_0$ hat diesen Ausdruck schon A. Stodola, Zeitschr. d. V. d. Ing. **43** (1899) S. 577, angegeben; für den vorliegenden Zweck wird aber gerade der Fall $l \neq l_0$ entscheidend.

Setzt man a aus (5) in (6) und außerdem in $l_k = l_0 - \Delta l_k$ noch Δl_k aus (1) ein, so kommt für die Knicklast eine quadratische Gleichung von der Gestalt

$$P_k^2 - 2\,Q\,P_k + \left(Q\frac{\lambda r}{l_0}\right)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mit den Beiwerten

$$Q = \frac{a^4 h_0\, G}{8\, r^3} \quad \text{und} \quad \lambda = 4\,\varkappa\,\pi \sqrt{\frac{E}{2\,(E + 2\,G)}} = 4\,\varkappa\,\pi \sqrt{\frac{1+\nu}{2\,(2+\nu)}} \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

falls man sofort noch die Poissonsche Zahl ν vermöge $E = 2\,G\,(1+\nu)$ einführt.

Sind die Wurzeln dieser Gleichung reell, so stellt die kleinere von beiden

$$P_k = Q\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda r}{l_0}\right)^2}\,\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

die Knicklast der Feder dar. Für Metalle mit $\nu = 0{,}3$ wird hierhei

$$\lambda = 6{,}7 \cdot \varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Als unmittelbar einleuchtend ist festzustellen:

Die Knicklast wächst mit steigender ursprünglicher Ganghöhe h_0 und sehr stark mit zunehmender Drahtstärke $2\,a$.

Fragt man nach der Abhängigkeit der Knicklast von der ursprünglichen Federlänge l_0 und vom Spulenhalbmesser r, so bemerkt man vor allem, daß die Wurzeln der Gleichung (7) komplex werden, sobald $l_0 < \lambda\,r$ bleibt. Dies besagt:

Eine Schraubenfeder kann durch eine Axiallast allein nicht geknickt werden, wenn ihre spannungslose Länge l_0 nicht mindestens das λ-fache des Spulenhalbmessers r beträgt, gleichviel wie groß die Drahtstärke $2\,a$ und die ursprüngliche Ganghöhe h_0 (oder die Windungszahl n) ist.

Der innere Grund für diese eigenartige Tatsache tritt besonders deutlich hervor, wenn man die Spulenlänge l_k im Augenblicke des Knickbeginns berechnet. Man findet auf Grund von (1) und (9)

$$l_k = \frac{l_0}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda r}{l_0}\right)^2}\,\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

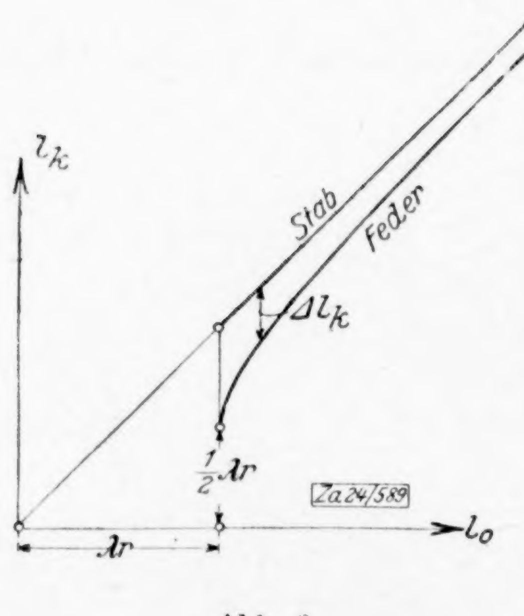


Abb. 3

Trägt man die Knicklängen l_k als Ordinaten über den Abszissen l_0 auf, so erscheint der in Abb. 3 gezeichnete Hyperbelast, im Unterschied von der Mediane, die die Verhältnisse des biegsamen, aber unzusammendrückbaren Stabes darstellt. Die Ordinatendifferenz zwischen Hyperbel und Mediane bedeutet zugleich die Achsenverkürzung Δl_k der Spule im Augenblicke des Knickbeginns.

Je kürzer, gemessen am Spulenhalbmesser, eine Federspule im spannungslosen Zustande ist, um so stärker muß sie zusammengedrückt werden, ehe sie ausknicken kann; im Grenzfalle $l_0 = \lambda\,r$ beginnt das Knicken gerade, wenn die ursprüngliche Federlänge l_0 sich auf die Hälfte verkürzt hat. Ist bei einer Verkürzung auf die Hälfte die Feder noch nicht geknickt, so kann sie durch eine Axiallast allein überhaupt nicht geknickt werden. Die Verkürzung im Augenblicke des Beginnens der Knickung ist unabhängig von der Drahtstärke $2\,a$ und von der ursprünglichen Ganghöhe h_0 (oder Windungszahl n).

Die Praxis hat übrigens von jeher mehr oder weniger bewußt von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß eine Feder, um knicksicher zu sein, einen hinreichend großen Spulenhalbmesser r besitzen muß.

3. Das Knickmoment. Ebenso wie ein Balken (beispielsweise eine Triebwelle), so läßt sich auch eine Schraubenfeder durch ein um die Spulenachse wirkendes Drillungsmoment M anstatt durch eine Axiallast oder noch allgemeiner in Verbindung mit

einer Axiallast zum Ausknicken bringen. Genau wie beim Balken[1]) zeigt sich bei der Feder, daß die zusammengehörenden kritischen Werte von M und P die Gleichung

$$M^2 + 4\,\alpha\,P = \left(\frac{2\,\pi\,\alpha}{l}\right)^2 \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

erfüllen müssen, wenn man sich auf den Fall beschränkt, daß die beiden Enden der Spulenachse so gelagert sind, daß sie dort keine Einspannmomente empfangen können.

Führt man die Biegungssteifigkeit der ungespannten Feder

$$\alpha_0 = \frac{l_0}{l}\,\alpha = \frac{a^4\,h_0}{2\,r}\,\frac{E\,G}{E+2\,G} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

in (12) ein und beachtet, daß nach (1) in Verbindung mit (8)

$$l = l_0\left(1 - \frac{P}{2\,Q}\right)$$

ist, so erhält man statt (12)

$$M^2 + 4\,\alpha_0\,P\left(1 - \frac{P}{2\,Q}\right) = \left(\frac{2\,\pi\,\alpha_0}{l_0}\right)^2 \qquad \ldots \ldots \ldots (14),$$

eine Gleichung, die im Falle $M = 0$ natürlich in die schon erledigte Gleichung (7) übergeht und mit $P = 0$ das Knickmoment M_k der nicht axialbelasteten Feder liefert:

$$M_k = \pm\,\frac{2\,\pi\,\alpha_0}{l_0} = \pm\,\frac{\pi\,a^4\,h_0\,E}{2\,l_0\,r\,(2+\nu)} \qquad \ldots \ldots \ldots (15).$$

Auch hier ist als einleuchtend festzustellen:

Das Knickmoment der nicht axialbelasteten Feder wächst mit steigender ursprünglicher Ganghöhe h_0, abnehmender ursprünglicher Spulenlänge l_0, abnehmendem Spulenhalbmesser r und sehr stark mit zunehmender Drahtstärke $2\,a$.

Der zugehörige Verdrillungswinkel der Spule ist nach (2)

$$\varphi_k = \pm\,\frac{4\,\pi}{2+\nu} \text{ (für Metalle} = 0{,}87\cdot 2\,\pi) \qquad \ldots \ldots \ldots (16).$$

Diese Formel besagt:

Der Verdrillungswinkel der nicht axialbelasteten, durch ein Drillungsmoment ausknickenden Feder ist etwas kleiner als ein voller Winkel, unabhängig von allen Federabmessungen.

Wir kehren wieder zum allgemeineren Falle der Knickung durch eine Kraftschraube (M, P) zurück und schreiben die Bedingungsgleichung für die kritischen Werte ihrer Komponenten M und P in der Form

$$\left(\frac{M}{R} - \frac{P}{Q} + 1\right)\left(\frac{M}{R} + \frac{P}{Q} - 1\right) = \left(\frac{\lambda\,r}{l_0}\right)^2 - 1 \qquad \ldots \ldots \ldots (17)$$

mit den teilweise schon benutzten Abkürzungen

$$Q = \frac{a^4\,h_0\,G}{8\,r^3}, \qquad R = \frac{a^4\,h_0\,G}{2\,r^2}\sqrt{\frac{1+\nu}{2\,(2+\nu)}}, \qquad \lambda = 4\,\pi\sqrt{\frac{1+\nu}{2\,(2+\nu)}} \qquad \ldots (18).$$

Wir fragen wieder nach der Abhängigkeit dieser kritischen Kraftschraube von der ursprünglichen Federlänge l_0 und stellen zunächst auf Grund von (17) fest, daß Q und R die Knicklast und das Knickmoment derjenigen Feder sind, die die ursprüngliche Länge $l_0 = \lambda\,r$ besitzt. Trägt man dann zusammengehörende kritische Werte von M/R und P/Q auf, so entsteht (Abb. 4) eine Schar von Hyperbelästen, deren jedem ein bestimmter Parameterwert l_0/r zukommt, und die natürlich nicht bis zu beliebig großen positiven Werten von P gelten,

Abb. 4

[1]) R. Grammel, diese Zeitschr. **3** (1923), S. 262.

sondern nur soweit, bis die Windungen sich berühren. Die kritische Kraftschraube der Grenzfeder $l_0 = \lambda r$ wird durch die beiden unter 45° gegen die Koordinatenachsen geneigten Geraden dargestellt, die vom Punkte $P/Q = 1$ sich nach der negativen Halbebene der P/Q-Werte (Zugkräften entsprechend) erstrecken. Federn von der Länge $l_0 > \lambda r$ zeigen qualitativ ein ähnliches Verhalten, wie massive Wellen — es sei daran erinnert, daß die zugehörige Kurve der Welle eine Parabel mit der Ordinatenachse als Hauptachse ist [1]) —; allerdings besteht insofern doch ein Unterschied, als beim gezogenen Stabe das kritische Moment mit gleichmäßig wachsendem Zuge schließlich immer langsamer, bei der gezogenen Feder dagegen immer gleichmäßiger zunimmt, eine Tatsache die zunächst sehr überrascht (— die durch den Zug merklich verlängerte Feder ließe verhältnismäßig geringere Knicksicherheit erwarten als der durch den Zug nicht merklich verlängerte Stab —), sich aber sofort dadurch erklärt, daß die Biegungssteifigkeit, also die für die Knicksicherheit maßgebende Größe, gemäß (5) mit zunehmender Spulenlänge l wächst. Noch merkwürdiger, jedoch jetzt wohlverständlich, ist das Verhalten der Federn von der ursprünglichen Länge $l_0 < \lambda r$. Man liest aus Abb. 4 ab:

Bei Federn, die so kurz sind, daß sie durch Axiallasten allein nicht zum Knicken kämen, nimmt das kritische Drillungsmoment M mit wachsendem Axialdruck $P (< Q)$ zunächst ab (wie bei anderen Federn und bei Stäben); sobald die Feder aber auf weniger als die Hälfte ihrer ursprünglichen Länge zusammengepreßt ist ($P > Q$), nimmt das kritische Drillungsmoment mit weiter wachsendem Axialdruck P ebenfalls zu: jetzt kann die Knicksicherheit durch Steigern des Axialdruckes erhöht werden.

Praktisch wichtig ist die Erkenntnis:

Der Bereich der sicheren Komponenten (M, P) der Kraftschraube liegt im Falle $l_0 \geqq \lambda r$ auf der hohlen Seite des der negativen P-Halbebene zugekehrten Hyperbelastes, im Falle $l_0 < \lambda r$ zwischen den beiden Hyperbelästen.

4. Knickgefahr bei Schwingungen. Soweit Federn Bestandteile schwingungsfähiger Gebilde sind, genügt es nicht, ihre statische Knicksicherheit zu gewährleisten. Die dynamische Knicksicherheit läßt sich am bequemsten beurteilen anhand der größten Schwingungsausschläge, genauer — bei Längsschwingungen — anhand der kleinsten Spulenlänge l_{min} während der Schwingung und — bei Drehschwingungen — anhand des größten Winkelausschlages φ_{max}, gerechnet von der spannungslosen Spulenform aus (die mit der Schwingungsmittellage nicht übereinzustimmen braucht). Darf man die Federmasse gegenüber den sonstigen schwingenden Massen vernachlässigen, so gilt offensichtlich:

Die Feder ist gegen Längsschwingungen knicksicher, wenn $l_{min} > l_k$ (11), gegen Drehschwingungen, wenn $|\varphi_{max}| < |\varphi_k|$ (16) bleibt.

Die Strecken Δl_k in Abb. 3 stellen also die zulässigen größten Ausschläge der längsschwingenden Feder vor, gerechnet von der spannungslosen Lage nach der Seite der Spulenverkürzung hin.

Abb. 5

Handelt es sich um Längs- und Drehschwingungen zusammen, so führt man in die Gleichung (14) für M und P vermittels (1) und (2) den Drillungswinkel φ sowie die Verkürzung Δl ein und erhält in Verbindung mit (16)

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_k}\right)^2 + \left(\frac{2\, l_0}{\lambda\, r}\right)^2 \frac{\Delta l}{l_0}\left(1 - \frac{\Delta l}{l_0}\right) = 1 \qquad (19).$$

Trägt man φ/φ_k und $\Delta l/l_0$ als rechtwinklige Koordinaten auf, so entsteht (Abb. 5) eine Schar von Hyperbelästen, von denen wieder jeder zu einem bestimmten Parameter l_0/r gehört, und deren Geltungsbereich durch

[1]) R. Grammel, diese Zeitschr. **3** (1923), S. 266.

das schon zu Abb. 4 Gesagte begrenzt ist. Anhand dieser Abbildung kann man den Sachverhalt so aussprechen:

Die Feder ist gegen Längs- und Drehschwingungen zugleich knicksicher, wenn die kleinste Spulenlänge l_{min} zusammen mit dem größten Drillungsausschlag φ_{max} sich in einen Punkt abbilden, der im Falle $l_0 \geqq \lambda r$ auf der hohlen Seite des der negativen Δl-Halbebene zugekehrten Hyperbelastes, im Falle $l_0 < \lambda r$ zwischen beiden Hyperbelästen liegt.

Wenn die Federmasse nicht vernachlässigt werden soll, wird die Frage nach der dynamischen Knicksicherheit verwickelt. Bei den technischen Anwendungen dürften die mitgeteilten Ergebnisse der Theorie erster Ordnung für alle Zwecke hinreichend genau sein. 388

Über die Form- und Auftriebsinvarianten für eine besondere Klasse von Flügelprofilen.

Von WILHELM MÜLLER in Hannover.

1. Allgemeine Bemerkungen. In meinem Aufsatz zur Tragflügeltheorie[1]) sind verschiedene Profile aus dem Kreise durch konforme Abbildung nach einem von Mises[2]) angegebenen Verfahren abgeleitet worden, unter der besonderen Voraussetzung, daß die Ableitung $\frac{dz}{d\zeta} = f(\zeta)$ der Funktion

$$z = F(\zeta) = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{c_n}{\zeta^n},$$

welche die Punkte ζ des Kreisäußeren in die Punkte z des Profiläußeren überführt von der Form

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{(\zeta - v_0)(\zeta - v_1) \ldots (\zeta - v_n)}{\zeta^{n+1}}$$

ist, also $n+1$ Nullpunkt, von denen v_0 auf dem Kreisumfange, alle anderen v im Kreisinnern anzunehmen sind, und einen Pol $n$ter Ordnung im Koordinatenanfangspunkt besitzt. Wenn man die besondere Voraussetzung für die Lage des Poles fallen läßt und mehrere getrennte und beliebig gelegene Pole zuläßt, so kann man für $\frac{dz}{d\zeta}$ die allgemeine gebrochene rationale Funktion

$$\frac{dz}{d\zeta} = f(\zeta) = \frac{(\zeta - v_0)^{k_0}(\zeta - v_1)^{k_1} \ldots (\zeta - v_n)^{k_n}}{(\zeta - w_0)^{\varkappa_0}(\zeta - w_1)^{\varkappa_1} \ldots (\zeta - w_m)^{\varkappa_m}} \quad \ldots \ldots (1)$$

ansetzen, wobei wir k_0 zunächst $= 1$ setzen werden, um ein Profil mit einer Spitze als Spurpunkt der Hinterkante des Flügels zu erhalten. Weil der Punkt $\zeta = \infty$ eine reguläre Stelle ist $\left(\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=\infty} = 1\right)$, so ergibt sich als erste Bedingung für die Verwendbarkeit der Abbildungsfunktion $z = \int f(\zeta)\, d\zeta$

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_n = \varkappa_0 + \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_m \quad \ldots \ldots (2).$$

Ferner ergibt sich, daß die Summe der Residuen der Funktion $f(\zeta)$ oder das Integral $z = F(\zeta)$, genommen längs einer geschlossenen außerhalb des Kreises gelegenen Kurve verschwindet. Da auch das aus der Funktionstheorie bekannte Integral

$$\frac{1}{2\, i\pi} \int \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \Sigma \varkappa_i w_i - \Sigma k_i v_i$$

für denselben Integrationsweg den Wert 0 hat, so ergibt sich als notwendige Bedingung dafür, daß die Funktion $z = F(\zeta)$ außerhalb K eindeutig ist, also in der Entwicklung kein logarithmisches Glied vorkommt

$$k_0 v_0 + k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n = \varkappa_0 w_0 + \varkappa_1 w_1 + \ldots + \varkappa_m w_m \quad \ldots (3).$$

[1]) Diese Zeitschrift, Bd. 4, 1924, S 213 bis 231.
[2]) Zeitschrift f. Flugt. u. Motorl., 1920, S. 68.

Betrachten wir z. B. in bezug auf ein Achsensystem durch den Mittelpunkt M_0 des Grundkreises K_g die Funktion

$$z = \zeta + \frac{l^2}{4(\zeta + \zeta_0)}$$

welche K in ein Joukowskysches Profil überführt, so haben wir

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{l^2}{4(\zeta + \zeta_0)^2} = \frac{\left(\zeta + \frac{l}{2} + \zeta_0\right)\left(\zeta + \zeta_0 - \frac{l}{2}\right)}{(\zeta + \zeta_0)^2}$$

und wir sehen, daß die Gleichungen (2) und (3) erfüllt sind. Sei ferner

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 + \frac{c_1}{(\zeta - w_0)(\zeta - w_1)} + \frac{c_2}{(\zeta - w_2)(\zeta - w_3)(\zeta - w_4)},$$

so lautet der Zähler des auf die Form (1) gebrachten Ausdrucks

$$(\zeta - w_0)(\zeta - w_1)(\zeta - w_2)(\zeta - w_3)(\zeta - w_4) + c_1(\zeta - w_2)(\zeta - w_3)(\zeta - w_4) + c_2(\zeta - w_0)(\zeta - w_1).$$

Man sieht auch hier, daß die Summe der Wurzeln $w_0 + w_1 + \ldots + w_4$ beträgt.

Um zu einer geometrisch einfach zu übersehenden Klasse von Profilen zu gelangen, die sich durch eine Abbildungsfunktion von der allgemeineren Art aus dem Kreise ableiten läßt, werden wir ein von Geckeler in seiner Dissertation[1]) besprochenes Konstruktionsverfahren zu Grunde legen, das sich durch Einfachheit auszeichnet. Es wird sich im folgenden darum handeln, sowohl das für die Formgebung charakteristische System der Nullstellen und Pole von $\frac{dz}{d\zeta}$ als auch das System der von Mises eingeführten Profilinvarianten für diese besondere Formengruppe geometrisch und rechnerisch zu verfolgen, das für die Auftriebswirkung in Frage kommt, wie sie entsteht, wenn der unendlich lange Flügel mit dem Profil als Querschnitt sich in der Luft bewegt resp. die Luft diesen Flügel anströmt.

2. Aus dem Kreise durch Vermittlung der Ellipse abgeleitete Formen.

Das erwähnte Verfahren besteht darin, daß man zunächst den Grundkreis K_g in eine Ellipse transformiert, deren Achsenverhältnis nicht stark von 1 abweicht und auf diese Ellipse die Joukowsky-Treffzsche Konstruktion anwendet. Die Umformung kommt also auf eine zweimalige Anwendung einer Transformation von dem Typus

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}$$

hinaus, wobei im zweiten Fall sowohl das Bezugsachsensystem wie die Potenz c^2 gewechselt wird.

Nimmt man den Mittelpunkt M_0 des Grundkreises als Anfangspunkt der Koordinaten und bezeichnet die komplexen Koordinaten in der Kreisebene mit ζ', so wird der Kreis durch die Funktion

$$z'' = \zeta' + \frac{q^2}{\zeta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

in eine Ellipse E der mit der Kreisebene als zusammenfallend gedachten Ebene z'' übergeführt. Um zum Ausdruck zu bringen, daß die Ellipse nicht stark vom Kreise abweicht, werde ich $q^2 = R \cdot \varepsilon$ setzen, wo R der Radius des Grundkreises und ε eine kleine Größe ist. Die Konstruktion verläuft dann derart, daß man um M_0 einen Kreis K_ε mit dem Radius ε zeichnet und die graphische Summe der Radienvektoren der Punkte von K_g und der auf den in bezug auf die reelle Achse spiegelbildlich gelegenen Vektoren der Punkte des Kreises K_ε graphisch addiert[2]). Die Längen der in der x'' und y''-Richtung liegenden halben Achsen der Ellipse sind $R + \varepsilon = a$ und $R - \varepsilon = b$. Geht man von der Ellipse E aus, so findet man den Radius des Grundkreises als arithmetisches Mittel zwischen den halben Achsen. Wenn nun $-l$ die Koordinate des Schnittpunktes dieser Ellipse mit der negativen reellen Achse eines zweiten, gegen das erste um $-\zeta_0$ verschobenen und um den Winkel $-\vartheta$ gedrehten Achsensystems bedeutet und der

---

[1]) Ueber Auftrieb und statische Längsstabilität von Flugzeugtragflächen in ihrer Abhängigkeit von der Profilform, München 1921, vgl. auch Z. f. M. Heft 10 (1922), S. 197, Heft 13 (1922), S. 191.

[2]) Kinematisch entsteht die Ellipse, wenn ein Punkt gleichmäßig die Peripherie eines Kreises mit dem Radius ε durchläuft, während der Mittelpunkt den Grundkreis mit entgegengesetzt gleicher Winkelgeschwindigkeit beschreibt.

Punkt $+l$ ins Innere der Ellipse fällt, so transformiert sich die Ellipse im allgemeinen durch Vermittlung der Funktion

$$z = z' + \frac{l^2}{z'} = z' + \frac{R\,g}{z'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

in ein Profil, dessen größter Durchmesser (Tiefe) angenähert $= 4\,l$ ist, wenn ζ_0 als klein vorausgesetzt wird und dessen Spitze im Punkte $-2\,l$ gelegen ist (Abb. 1 u. 2).

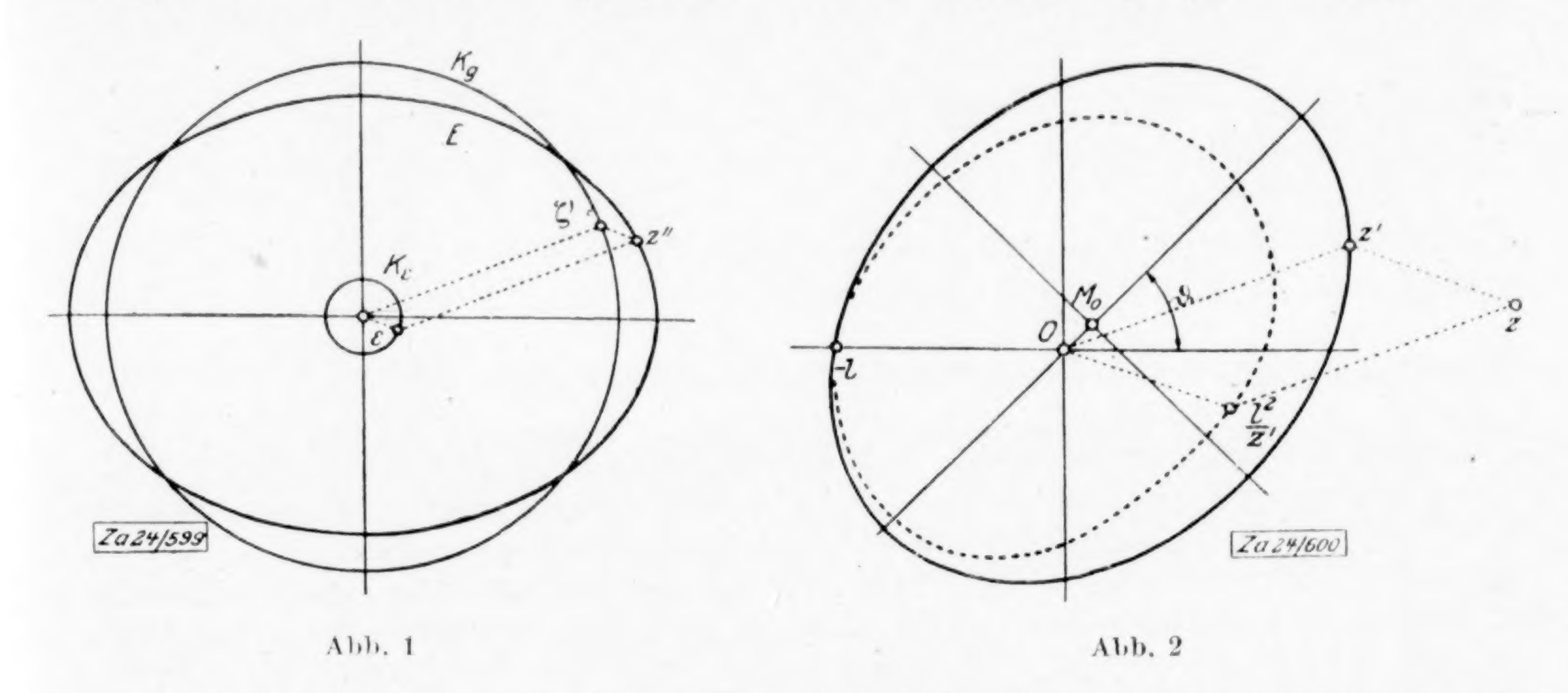


Abb. 1 Abb. 2

Die mittels Transformation durch reziproke Radien $\frac{R\,g}{z'}$ aus der Ellipse E abgeleitete Kurve ist eine rationale (bezirkulare) Kurve 4. Ordnung, die in dem Falle, daß das Inversionszentrum O nahe bei dem Mittelpunkt M_0 der Ellipse liegt, nicht stark von einer Ellipse abweicht. Sie ist bekanntlich gleichzeitig die Fußpunktkurve der an der reellen Achse gespiegelten Polarreziproken der Ellipse in bezug auf den »Inversionskreis« (um O mit Radius l). Wenn O in den Brennpunkt der Ellipse fällt, so erhält man, als Spezialfall der rationalen Quartik eine Pascalsche Kurve, deren Polargleichung in bezug auf den Brennpunkt als Pol und die große Achse der Ellipse als Amplitudenachse mit l als numerische Exzentrizität und p als Parameter lautet

$$\varrho = \frac{l^2 a}{b^2}\,(1 - e \cos(\psi - \vartheta)) = p\,(1 - e \cos(\psi - \vartheta))$$

und die in einfachster Weise aus dem durch den Brennpunkt gehenden Kreis mit dem Durchmesser $\frac{l^2 a}{b^2}$ zu konstruieren ist.

Damit allgemein die entstehende Profilkurve keinen Doppelpunkt erhält, darf die zu E reziproke Kurve außer dem Berührungspunkt $-l$ keinen weiteren Punkt mit der Ellipse gemeinsam haben, d. h. sie muß innerhalb der Ellipse verlaufen; es muß also das Produkt aller zur reellen Achse des 2. Systems spiegelbildlichen Radienvektoren $> l^2$ sein. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn O auf der kleinen Achse der Ellipse liegt, dagegen für die Lage auf der großen Achse nur dann, wenn der Abstand vom Scheitel kleiner ist als dessen Krümmungsradius. Dadurch werden bei gegebenen R, l, ε der Größe des Winkels ϑ gewisse Beschränkungen auferiegt.

Für die Umformung des Kreises in das Profil haben wir im ganzen folgendes System an Transformationsformeln

$$z'' = \zeta' + \frac{R\,\varepsilon}{\zeta'}, \quad z' = z'' e^{i\vartheta} + \zeta_0, \quad \zeta = \zeta' e^{i\vartheta} + \zeta_0, \quad z = z' + \frac{R\,g}{z'} \quad . \; . \quad (6)$$

Durch Kombination erhalten wir für die Bezieiung zwischen z und ζ eine Entwicklung, die folgendermaßen beginnt

$$z = \zeta\,\frac{R\,(\varepsilon\, e^{2i\vartheta} + g)}{\zeta} + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

3. Lage der Nullstellen und Pole. Um die allgemeinen Bemerkungen unter 1. zu bestätigen, mögen zunächst einige Betrachtungen über das System der Nullstellen und Pole angestellt werden.

Wegen

$$\frac{dz}{d\zeta}=\frac{dz}{dz'}\frac{dz'}{dz''}\frac{dz''}{d\zeta'}\frac{d\zeta'}{d\zeta}=\left(1-\frac{l^2}{z'^2}\right)\left(1-\frac{q^2}{\zeta'^2}\right)$$

haben wir für die Nullstellen $z'=\pm l$, $\zeta'=\pm q$. Diese Koordinatenwerte müssen noch auf die Kreisebene übertragen werden. $\zeta'=\pm q$ bezieht sich auf die beiden Punkte auf der großen Ellipsenachse, deren Abstände von M_0 gleich der halben linearen Exzentrizität der Ellipse sind. In bezug auf das System ζ (resp. z) finden wir dann durch (6)

$$v_4=q\,e^{i\vartheta}+\zeta_0,\quad v_5=-q\,e^{i\vartheta}+\zeta_0 \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Die Koordinaten der Nullstellen, die $z'=\pm l$ entsprechen, findet man aus den beiden Gleichungen

$$l=\zeta+\frac{q^2e^{2i\vartheta}}{\zeta-\zeta_0}\qquad -q=\zeta+\frac{q^2e^{2i\vartheta}}{\zeta-\zeta_0}$$

oder

$$\zeta^2-\zeta(\zeta_0-l)+q^2e^{2i\vartheta}-l\,\zeta_0=0 \quad\text{und}\quad \zeta^2-\zeta(\zeta_0+l)+q^2e^{2i\vartheta}+l\,\zeta_0=0 \quad . (9)$$

Wir erhalten also vier weitere Nullpunkte $v_0\,v_1\,v_2\,v_3$, für die die Beziehungen gelten

$$v_0+v_1=\zeta_0-l,\; v_2+v_3=\zeta_0+l \quad \ldots\ldots . (9\text{a}).$$

v_0 soll sich auf den Punkt des Grundkreises K_g beziehen, welcher dem Punkt $-l$ der Ellipse entspricht. Es ist gleichzeitig der Staupunkt der ebenen Strömung im Außengebiete des Kreises, der sich in den Spurpunkt der Profilhinterkante transformiert.

Unter der Voraussetzung, daß ζ_0 klein und die Abweichung der Länge l von R etwa von der Größenordnung ε ist, sieht man geometrisch sofort ein, daß v_2 in die Nähe des Punktes $+l$ fällt und daß v_1 und v_3 in die Nähe der Peripherie des Kreises K_ε etwa diametral zueinander zu liegen kommen. Der Schlichheit der Abbildung halber muß verlangt werden, daß der dem Kreisumfang nahe gelegene Punkt v_2 nicht außerhalb des Kreises fällt.

Die Pole findet man aus

$$z'^2=0 \qquad \zeta'^2=0.$$

Zunächst ist der Mittelpunkt M_0 des Profils doppelter Pol ($w_0=w_1=\zeta_0$). Der Gleichung $z'^2=0$ entsprechen zwei Doppelpole, deren Koordinaten die Wurzeln der Gleichung

$$-\zeta_0\,e^{i\vartheta}=\zeta'+\frac{q^2}{\zeta^1}=(\zeta-\zeta_0)\,e^{-i\vartheta}+\frac{p^2e^{i\vartheta}}{\zeta-\zeta_0}$$

oder

$$\zeta^2-\zeta\,\zeta_0+p^2e^{2i\vartheta}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

sind. Man findet daher

$$w_2=w_4,\qquad w_3=w_5,\qquad w_2+w_3=\zeta_0,\qquad w_2\,w_3=q^2e^{2i\vartheta} \quad . . (10\text{a}).$$

Mit (8) und (9) haben wir also die Beziehung

$$v_0+v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=w_0+w_1+w_2+w_3+w_4+w_5=2\,(w_0+w_2+w_3) \quad (11).$$

Wie man aus den Gleichungen erkennt, werden die Punkte v_i im allgemeine getrennt liegen. Die Ableitung $\frac{dz}{d\zeta}=f(\zeta)$ hat also die Form

$$\frac{dz}{d\zeta}=\frac{(\zeta-v_0)(\zeta-v_1)(\zeta-v_2)(\zeta-v_3)(\zeta+v_4)(\zeta-v_5)}{(\zeta-w_0)^4(\zeta-w_2)^2(\zeta-w_3)^2} \quad \ldots\ldots (12).$$

Wenn $\varepsilon=0$ wird, so fallen 4 Nullstellen und 4 Pole in den Punkt ζ_0; es hebt sich also im Zähler und Nenner der gemeinsame Faktor $(\zeta-\zeta_0)^4$ heraus, und wir erhalten — wie vorauszusehen — den Joukowskyschen Fall mit

$$\frac{dz}{d\zeta}=\frac{(\zeta+l)(\zeta-l)}{\zeta^2}.$$

Zwischen den Nullstellen bestehen übrigens noch drei unabhängige Beziehungen

$$v_0+v_1+v_2+v_3=v_4+v_5;\; v_0^2+v_1^2=v_2^2+v_3^2;\; 2\,(v_0\,v_1+v_2\,v_3)=(v_4-v_5)^2. \quad (13).$$

Daraus oder aus der Grundkonstruktion leiten sich verschiedene geometrische Sätze her, von denen nur einige erwähnt werden sollen. Die Pole $w_2\,w_3$ bilden z. B. mit O und M_0 ein Parallelogramm, dessen Winkel von den Achsenrichtungen der Ellipse halbiert werden und dessen Seiten das Produkt q^2 haben. Sind daher die drei Pole w_0 (d. h. der Mittelpunkt des Profils), w_2 und w_3 gegeben, so kann man den Punkt O und die Ellipse E durch Konstruktion finden. Da das System der Pole von l unabhängig ist, so gibt es ∞^1 Profile mit denselben Grundpunkten $w_0\,w_2\,w_3$, die man erhält, wenn man die im zu

lässigen Bereich gelegenen Geraden durch O als reelle Bezugsachsen annimmt. Wesentlicher mit der Gestalt des Profils selbst verknüpft ist das System der Nullstellen, dessen geometrisch invarianter Charakter uns noch kurz zu beschäftigen hat. Bezogen auf ein gegebenes Achsensystem genügt die Festlegung von drei Nullstellen, um das zugehörige Profil zu bestimmen. Wenn etwa $v_0\, v_1\, v_2$ gegeben sind, so findet man der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned} v_3^2 &= v_0^2 + v_1^2 - v_2^2, \qquad & v_0 + v_1 + v_2 + v_3 &= 2\,\zeta_0 \\ v_0 + v_1 - (v_2 + v_3) &= -\,2\,l, \qquad & q^2 e^{2 i \vartheta} &= v_0\, v_1 - \zeta_0\, l \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (13\,\mathrm{a}).$$

Interessanter ist das Problem, das Profil allein aus der Konfiguration von vier Nullstellen rein geometrisch zu finden. Ist z. B. die Lage von $v_0\, v_2\, v_4\, v_5$ gegeben, so hat man im Mittelpunkt von $\overline{v_4\, v_5}$ zunächst den Punkt M_0 und damit, weil v_0 auf K_g liegt, den Radius des Grundkreises. Da v_4 und v_5 auf der großen Achse der Ellipse liegen und $\overline{v_4\, v_5} = 2\,R\,\varepsilon$ ist, so kennt man ε und daher die Ellipse. Man kann daher den v_0 entsprechenden Ellipsenpunkt v_0' (A'') und den v_2 entsprechenden Punkt v_2' finden und hat in der Verbindungslinie $v_0'\, v_2'$ die reelle Achse des 2. Systems mit dem Mittelpunkt als Anfangspunkt.

Etwas schwieriger zu übersehen ist der Fall, daß $v_0\, v_1\, v_2\, v_3$ gegeben sind. Schreibt man die dritte Beziehung in der Form

$$\frac{v_0 + v_1}{2} - \frac{v_2 + v_3}{2} = -\,l,$$

so sieht man, daß die Verbindungsstrecken der Mitten von $\overline{v_0\, v_1}$ und $\overline{v_2\, v_3}$ die Länge l und die Richtung der gesuchten reellen Achse hat. Der Schwerpunkt des Systems der Punkte $v_0\, v_1\, v_2\, v_3$ ist ferner der Mittelpunkt von $O\, M_0$. Um O und M_0 zu finden, bringen wir die 1. Gleichung von 13 a) auf die Gestalt

$$\frac{v_0 + v_2}{v_1 + v_3} = \frac{m_{0\,2}}{m_{1\,3}} = \frac{v_3 - v_1}{v_0 - v_2} \text{ oder } \frac{v_0 + v_3}{v_1 + v_2} = \frac{m_{0\,3}}{m_{1\,2}} = \frac{v_2 - v_1}{v_0 - v_3} \quad . \; . \; . \; . \; (13\,\mathrm{b}),$$

wo m_{ik} die Mitte der Strecke $\overline{v_i\, v_k}$ bedeuten soll. Man sieht daraus, daß der Winkel, unter dem die Verbindungslinie der Mitten der Seiten $\overline{v_0\, v_2}$ und $\overline{v_1\, v_3}$, $m_{0\,2}\, m_{1\,3}$ von O aus erscheint gleich dem Winkel ist zwischen den Seiten $v_3\, v_1$ und $v_0\, v_2$; ebenso der Winkel $m_{0\,3}\, O\, m_{1\,2}$ gleich dem Winkel zwischen $v_3\, v_0$ und $v_1\, v_2$. Da aber $m_{0\,2}\, m_{1\,3}$ und $m_{0\,3}\, m_{1\,2}$ sich im Punkte $\frac{\zeta_0}{2}$ schneiden, so ergibt sich für M_0 und O folgende einfache Konstruktion. Man lege die Kreise durch $m_{0\,2}\, m_{1\,3}$ und den Schnittpunkt $(v_0\, v_2,\; v_1\, v_3)$ resp. durch $m_{0\,3}\, m_{1\,2}$ und den Schnittpunkt $(v_0\, v_3,\; v_1\, v_2)$. Jeder der beiden Durchschnittspunkte, von denen in der Abbildung nur der eine markiert ist, kann als Mittelpunkt M_0 angesehen werden, unter der Voraussetzung, daß der Kreis selbst, durch v_0 gelegt, alle anderen Nullstellen in sich enthält. O ist dann der Gegenpunkt zu M_0 in bezug auf den Schwerpunkt S des Punktequadrupels v_i. Mit O ist ferner die x-Achse durch O und der Punkt A'' auf der Ellipse bekannt, damit auch die Strecke ε als Abstand des Punktes $A'(v_0)$ von A''. Die Halbierungslinien des Winkels zwischen $A'\, M_0$ und $A'\, A''$ sind die Richtungen der Achsen der Ellipse, die daher konstruiert werden kann (vergl. Abb. 3). Auf weitere naheliegende geometrische Beziehungen kann in diesem Zusammenhang nicht eingegangen werden.

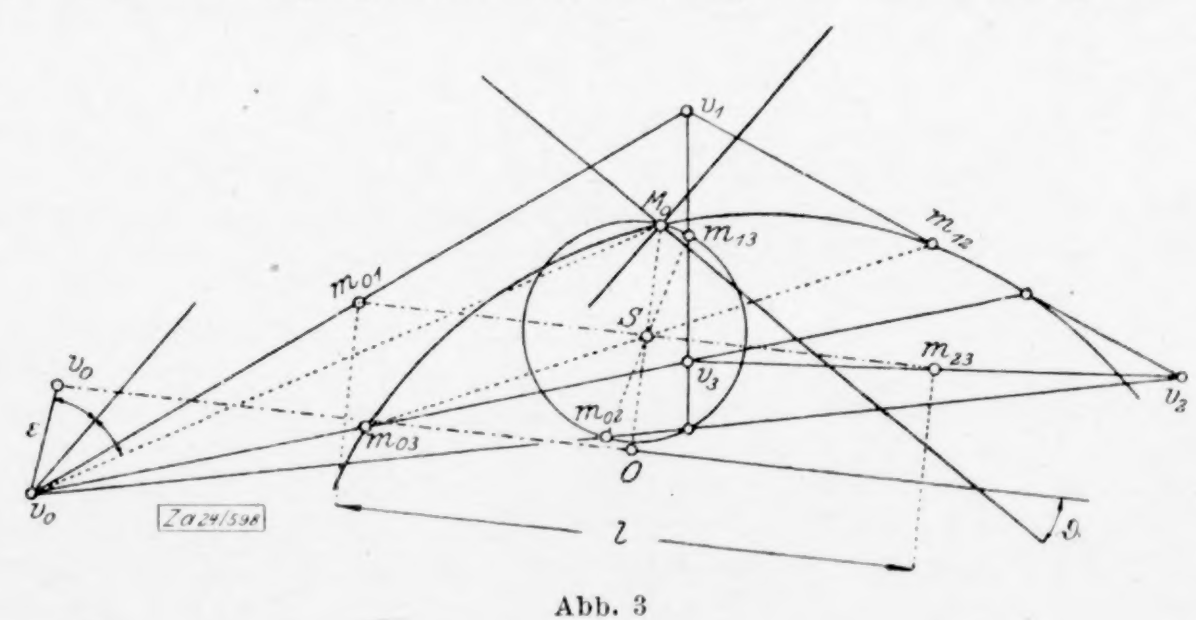


Abb. 3

4. Die Auffindung der Misesschen Invarianten des Profils, die maßgebend sind für die Auftriebswirkung einer im Außenraum des Profils verlaufenden stationären zyklischen Strömung, geschieht in folgender Weise. Bezeichnet man den Winkel der Geraden $A'' M_0$ gegen die x-Achse mit φ_E und das Argument des Punktes A'' im ersten System mit ψ_E, die entsprechenden Größen am Kreis K_g mit φ_K und ψ_K, so haben wir die Beziehungen

$$\varphi_E = \vartheta + \psi_E - \pi, \quad \varphi_K = \vartheta + \psi_K - \pi.$$

Wegen

$$x'' + i y'' = \zeta' + \frac{R\,\varepsilon}{\zeta'}$$

erhalten wir

$$x'' = \cos\psi_K (R + \varepsilon), \quad y'' = \sin\psi_K (R - \varepsilon)$$

$$\operatorname{tg}\psi_E = \operatorname{tg}\psi_K \frac{R-\varepsilon}{R+\varepsilon} = \operatorname{tg}\psi_K \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}\psi_K = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\psi_E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

wenn a und b die Halbachsen der Ellipse bedeuten.

Weiter ergibt sich

$$\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi_K) = \frac{a}{b}\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi_E)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_K - \varphi_E) = \operatorname{tg}(\psi_K - \psi_E) = \operatorname{tg}\psi_E \frac{a-b}{b + a\operatorname{tg}^2\psi_E} \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Ist die Exzentrizität gering, d. h. ε sehr klein, so kann man

$$\operatorname{tg}(\varphi_K - \varphi_E) = \operatorname{tg}\psi_E \frac{2\varepsilon}{R - \varepsilon + (R+\varepsilon)\operatorname{tg}^2\psi_E} = \frac{2\varepsilon}{R}\,\frac{\operatorname{tg}\psi_E}{1 + \operatorname{tg}^2\psi_E} = \frac{\varepsilon}{R}\sin 2\psi_E$$

$$= \frac{\varepsilon}{R}\sin 2(\varphi_E - \vartheta) \quad (15\text{a}).$$

Die größte Argumentänderung tritt für $\vartheta = \varphi_E \pm 45^0$ auf, dann wird

$$\operatorname{tg}(\varphi_K - \varphi_E) = \frac{\varepsilon}{R}.$$

φ_K ist der Winkel, den die ersten Profilachse oder diejenige Richtung, der als Anströmrichtung eine verschwindende Zirkulation, daher ein verschwinder Auftrieb entspricht, mit der reellen Richtung bildet. Aus (13) erhalten wir für den tg dieses Winkels ohne weiteres

$$\operatorname{tg}\varphi_K = \frac{a\operatorname{tg}(\varphi_E - \vartheta) + b\operatorname{tg}\vartheta}{b - a\operatorname{tg}\vartheta\operatorname{tg}(\varphi_E - \vartheta)} = \frac{a\operatorname{tg}\varphi_E - (a-b)\operatorname{tg}\vartheta + b\operatorname{tg}\varphi_E\operatorname{tg}^2\vartheta}{a\operatorname{tg}^2\vartheta - (a-b)\operatorname{tg}\varphi_E\operatorname{tg}\vartheta + b}$$

$$= \frac{(R+\varepsilon)\operatorname{tg}\varphi_E - 2\varepsilon\operatorname{tg}\vartheta + (R-\varepsilon)\operatorname{tg}\varphi_E\operatorname{tg}^2\vartheta}{(R+\varepsilon)\operatorname{tg}^2\vartheta - 2\varepsilon\operatorname{tg}\varphi_E\operatorname{tg}\vartheta + R - \varepsilon} \quad . \quad (16).$$

Um den Staupunkt A' des Kreises K_g zu erhalten, trägt man an die Parallele durch M_0 zur reellen Achse im Mittelpunkt φ_K (nach unten) an. Geometrisch erhält man A' als Schnittpunkt des Kreises mit dem Radius ε um A'' mit K_g, und zwar ist der Schnittpunkt so auszuwählen, daß die Parallele zu $A'A$ durch M_0 den zu A' benachbarten Quadranten trifft. Die Richtung der zweiten Achse ergibt sich aus der Entwicklung (7) auf Grund der allgemeinen Darlegungen von Mises. Sei γ der Winkel, den diese Richtung mit der Realachse einschließt und f die »Brennweite« des Profils (Abstand des Brennpunktes F vom Mittelpunkt M_0), so hat man

$$\varepsilon e^{2i\vartheta} + g = f e^{2i\gamma}$$

und daher

$$\varepsilon\cos 2\vartheta + g = f\cos 2\gamma, \qquad \varepsilon\sin 2\vartheta = f\sin 2\gamma$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{\varepsilon\sin 2\vartheta}{\varepsilon\cos 2\vartheta + g}, \quad f^2 = \varepsilon^2 + g^2 + 2g\varepsilon\cos 2\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Aus diesen Beziehungen ergibt sich eine einfache Konstruktion der zweiten Achse und des Brennpunktes F des Profils (vergl. Abb. 4). Man bestimmt zunächst auf dem Radius $M_0 B$ parallel zur reellen Achse den Punkt G, dessen Abstand vom Mittelpunkt $= g = \frac{l^2}{R}$, etwa vermittels des Halbkreises $B L' M_0$ und des Lotes vom Punkte L', der von M_0 um die Strecke l entfernt ist, auf $B M_0$ oder durch die aus der Abbildung ohne weiteres verständlichen Linien $M_0 C$, $L G \parallel C L$ mit $M_0 L' = l$ (wobei jetzt der Radius $M_0 C$ beliebig gezogen werden kann). Sei nun B' der B entsprechende Punkt auf der Ellipse E, so konstruiert man den Punkt E, der $B B' G$ zum Parallelogramm ergänzt. Dann ist der Winkel $E M_0 G = 2\gamma$, also seine Halbierungslinie die zweite Profilachse durch M_0

und $E M_0 = f$. Den Brennpunkt F selbst findet man durch Uebertragung der Strecke $M_0 E$ auf den zur ersten Achse in bezug auf die zweite Achse spiegelbildlich gelegenen Strahl.

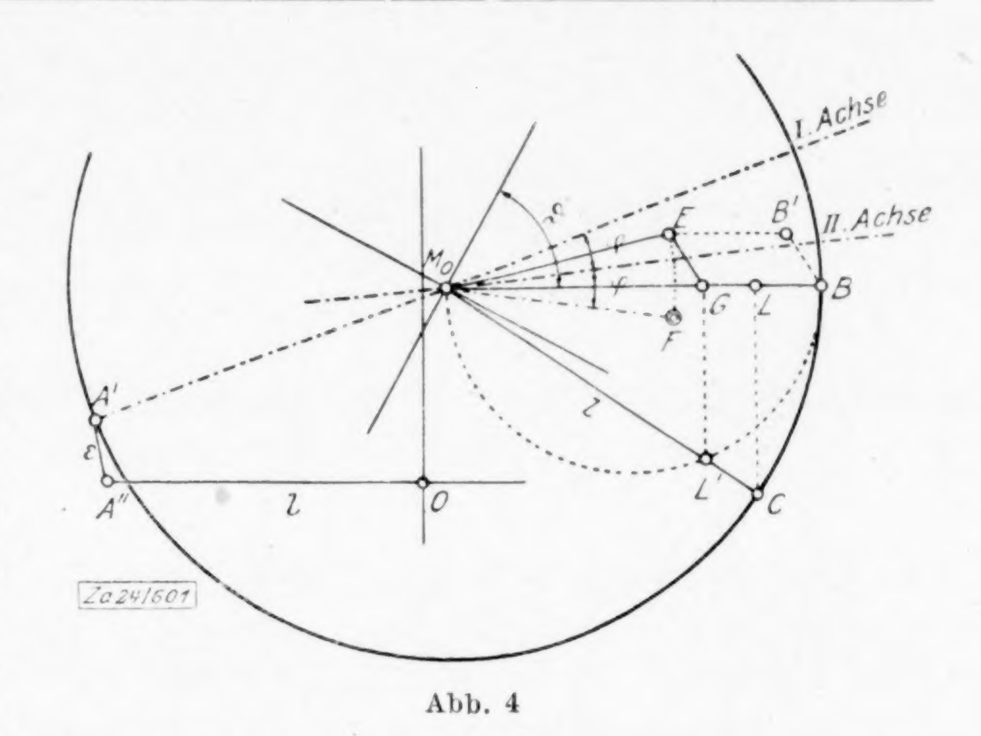


Abb. 4

Man sieht übrigens, daß $g + \varepsilon \geqq g \geqq g - \varepsilon$ wird. Im Falle $\vartheta = 0$ wird $\gamma = 0$ und $f = \varepsilon + g$, im Falle $\vartheta = 90^0$ wird $\gamma = 0$ und $f = g - \varepsilon$, für $\vartheta = 45^0$ wird $\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{\varepsilon}{g}$, $f^2 = \varepsilon^2 + g^2$. Die komplexe Koordinate des Profilbrennpunktes ist

$$z_F = \zeta_0 + (\varepsilon\, e^{2i\vartheta} + g)\, e^{-i\varphi_K} \quad (18).$$

Für den Parameter der Auftriebsparabel, die F als Brennpunkt und die erste Achse als Leitlinie besitzt, gewinnen wir aus der allgemeinen Formel von Mises

$$\pi = f \sin 2\,(\varphi_K - \gamma) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

den Ausdruck

$$\pi = g \sin 2\,\varphi_K + \varepsilon \sin 2\,(\varphi_K - \vartheta) \quad \ldots \ldots \quad (19\,\mathrm{a}).$$

4. Ueberblick über die möglichen Profilformen. Wenn man den Radius des Grundkreises als festgegeben ansieht, so kann man noch verfügen über die Größen ε, ϑ, $\zeta_0 = \xi_0 + i\,\eta_0$ resp. ε, ϑ, φ_E, g. Man erhält also eine ∞^4-fache Mannigfaltigkeit von Formen. Die Wahl der Größe l resp. g im Verhältnis zu R wird die Dicke und damit auch in geringfügigem Maße neben R selbst die Tiefe des Profils bestimmen. Bei kleinem ε kann man sich in bezug auf die Dicke einigermaßen nach der Gestaltung des gleichwertigen Joukowskyschen Profils richten, für das die größte Dicke etwa $5{,}2\ (R - l)$ beträgt. Die feineren Unterschiede in der Dicke drücken sich in dem Wechsel der Brennweite f des Profils aus. Bei festem R, ε, g nimmt die Dicke mit wachsendem Winkel ϑ zu. $\vartheta = 0^0$ gibt den kleinsten, $\vartheta = 90^0$ den größten Wert. Die Elemente ε, ϑ und φ_E werden maßgebend sein für die Krümmungsverhältnisse resp. die Wölbung des Profils. Je größer ε, also die Exzentrizität der Ellipse ist, desto stärker ist die Verzerrung gegenüber dem $\varepsilon = 0$ entsprechenden Joukowskyschen Profil, wie die weiter unten zu besprechenden Beispiele zeigen. Ist $\vartheta = 0$ resp. 90^0, so besteht diese Verzerrung in einer Streckung resp. längsgerichteten Zusammendrückung. Wenn ϑ zwischen 0^0 und 90^0 etwa im Gebiete von 45^0 liegt, so erhält man besonders ausgeprägte **S**-Formen, d. h. Profile, deren hinterer Teil eine nach unten konvexe Krümmung besitzt. Wenn ϑ negativ im Gebiete von -45^0 liegt, so erhält man Profile von entgegengesetztem Typus, die im vorderen Teil in der oberen Berandung stärker aufgebläht, dagegen im hinteren Teile sichelartig zugespitzt erscheinen. Eine Aufrichtung der Ellipse (Zunahme von ϑ etwa um 45^0 bis 90^0 resp. -45^0 bis -90^0) wird eine Verlegung der Stelle größter Dicke vom vorderen Teile nach der Mitte, gleichzeitig eine Verstärkung der Krümmung des vorderen Endes veranlassen. Die Formveränderung kann auch nach einer leicht erkennbaren Regel mit der Wanderung der Nullpunkte (resp. Pole) insbesondere des in der Nähe von K_g gelegenen Punktes v_2 und der bei beiden auf der großen Achse der Ellipse gelegenen Nullstellen v_4 und v_5 in Zusammenhang gebracht werden. Die Radienvektoren von M_0 nach v_4 und v_5 zu sind auf die Stellen größter Ellipsenkrümmung gerichtet. Daher zeigen auch die entsprechenden Stellen des Profils gegenüber der Grundform $\varepsilon = 0$ eine verstärkte Konvexität nach außen.

Was die Konstruktion angeht, so kann man etwa, wenn man die reelle Achse im zweiten Koordinatensystem und den Punkt A' der Ellipse (auf dieser Achse) von vornherein festlegen will, nach Wahl der Größen φ_E, ε, l (resp. g) und ϑ den Mittelpunkt M_0 der Ellipse mit den Halbachsen $R + \varepsilon$ und $R - \varepsilon$ durch Berechnung des Radiusvektors $r = A' M_0$ finden. Für das Quadrat dieser Länge hat man

$$r^2 = \frac{(R^2 - \varepsilon^2)^2}{(R + \varepsilon)^2 \sin^2 \psi_E + (R - \varepsilon)^2 \cos^2 \psi_E} = \frac{(R^2 - \varepsilon^2)^2}{(R + \varepsilon)^2 \sin^2 (\varphi_E - \vartheta) + (R - \varepsilon)^2 \cos^2 (\varphi_E - \vartheta)}$$

$$= \frac{(R^2 - \varepsilon^2)^2}{(R + \varepsilon)^2 - 4\, R\, \varepsilon \cos^2 (\varphi_E - \vartheta)} \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

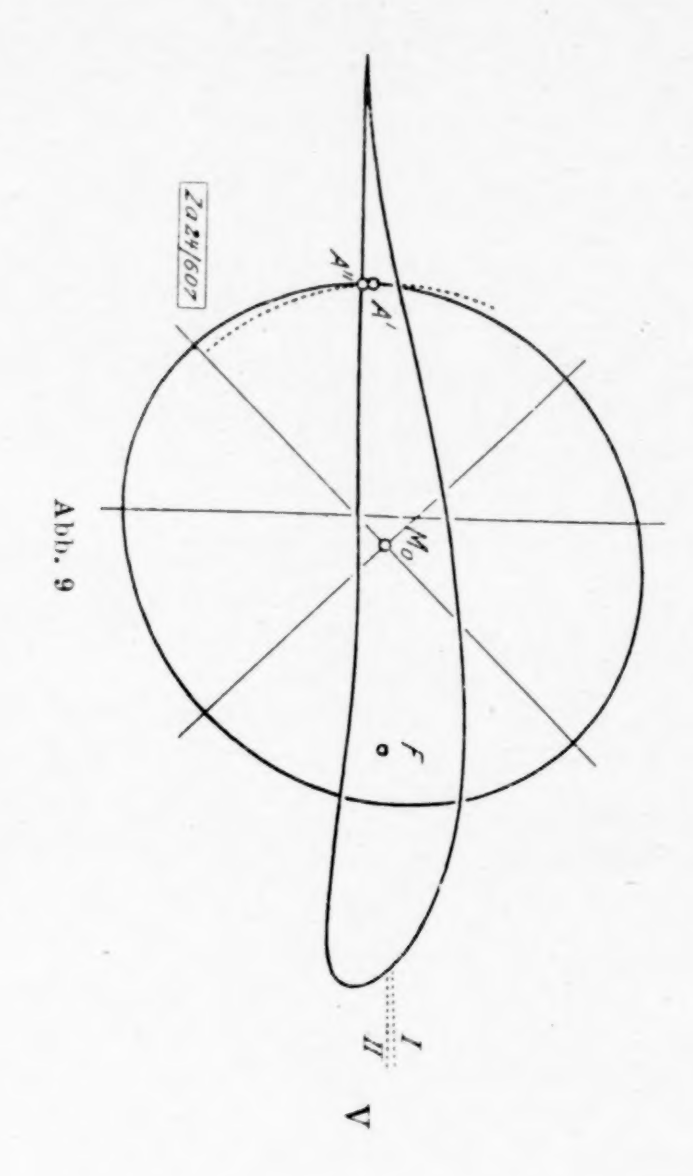


Abb. 9

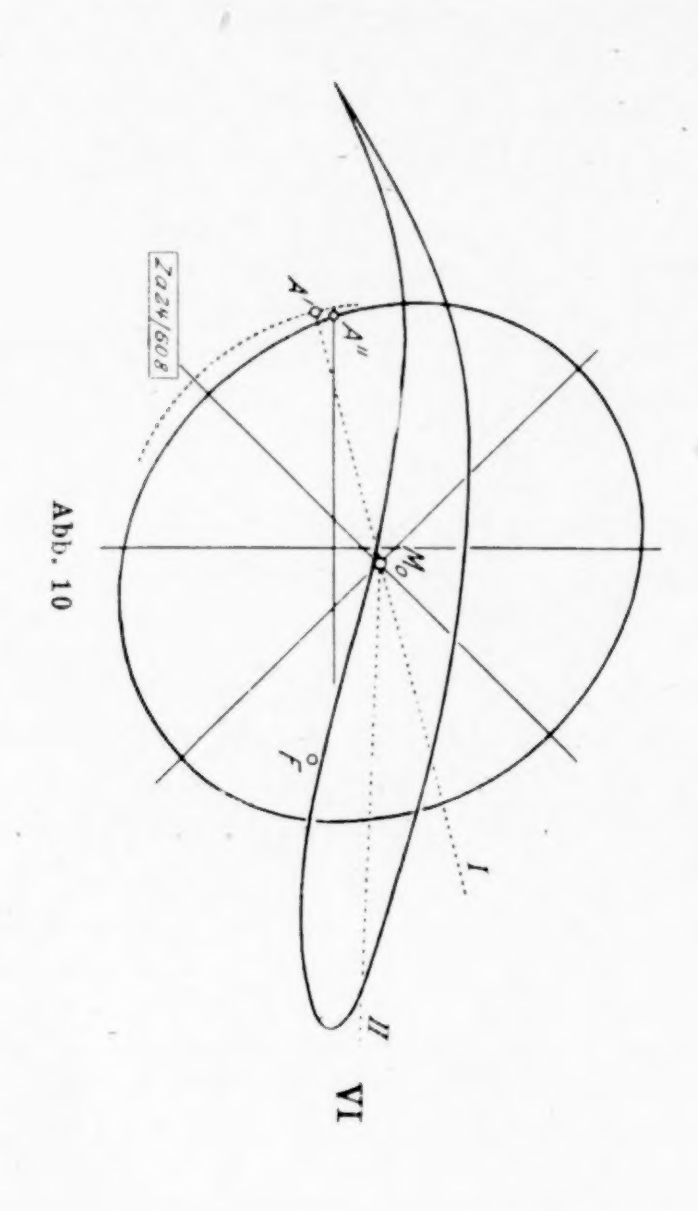


Abb. 10

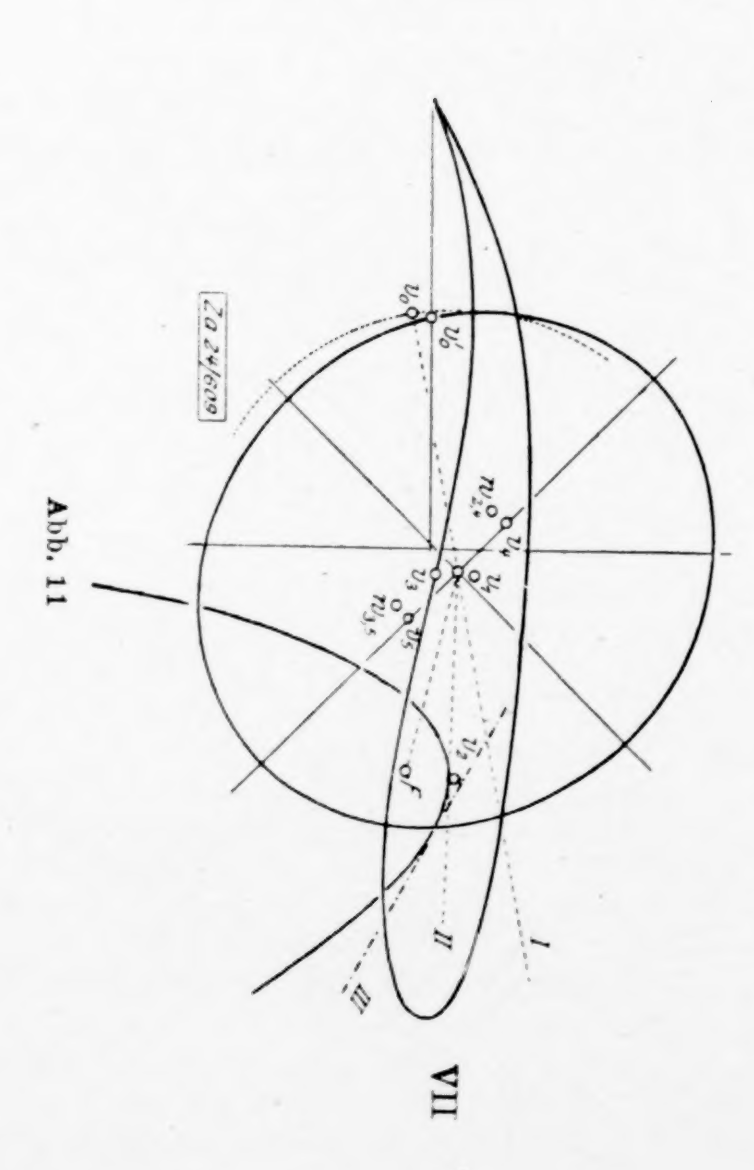


Abb. 11

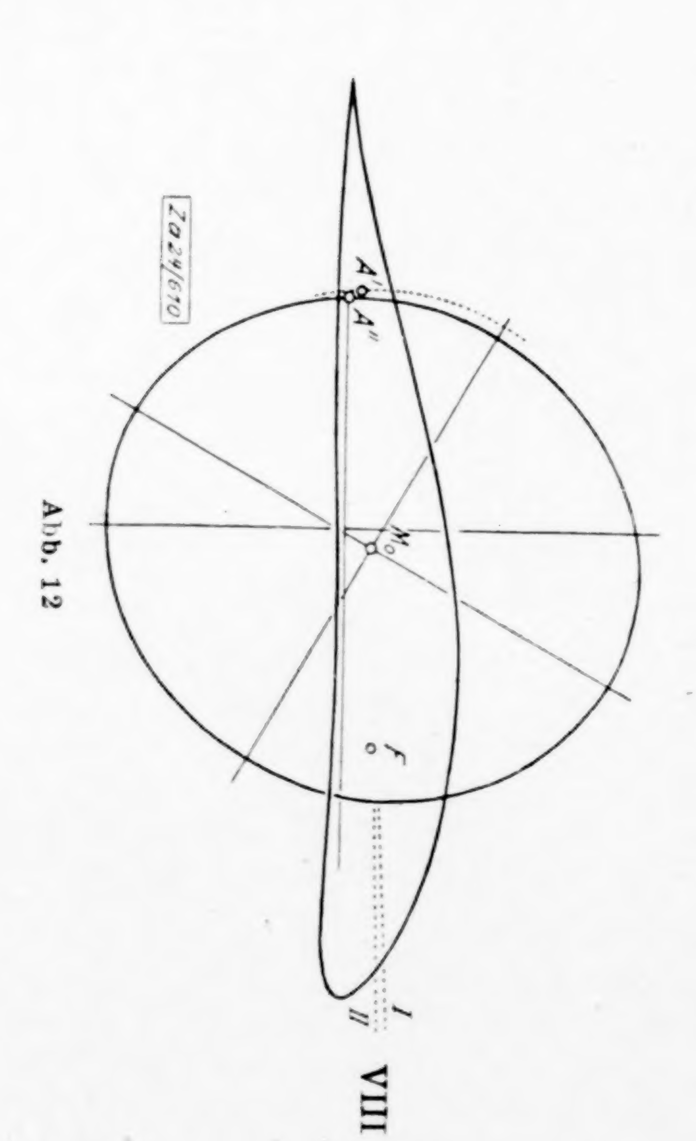


Abb. 12

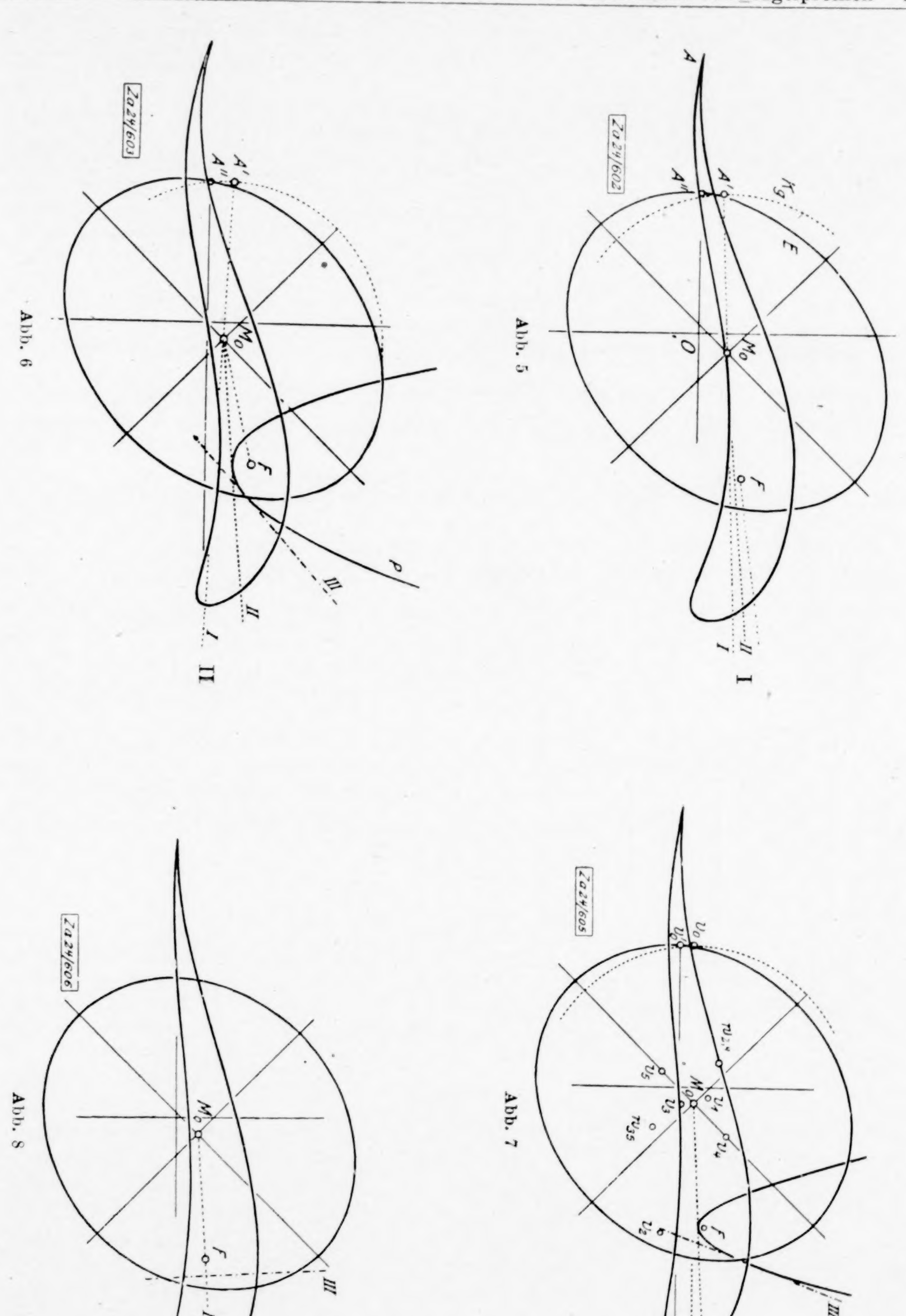


Abb. 5

Abb. 6

Abb. 7

Abb. 8

Nach dem vorgetragenen Verfahren sind einige Profile konstruiert und in bezug auf ihre zu erwartende Wirkungsweise untersucht worden. Wegen der großen Mannigfaltigkeit von Formen haben wir uns im wesentlichen auf die Betrachtung der Krümmungsverhältnisse beschränkt und R und l durchgehend konstant angenommen ($R = 5,\ 6,\ l = 5$).

Um zunächst die beiden gegensätzlichen Typen in der Formreihe zu zeigen, sind einige Profile mit $\vartheta = 45^0$ und $= -45^0$ gezeichnet. Mit $\vartheta = \pm 45^0$ erhalten die Formeln die einfache Gestalt

$$\operatorname{tg} \varphi_K = \frac{R \operatorname{tg} \varphi_E \mp \varepsilon}{R \mp \varepsilon \operatorname{tg} \varphi_E}; \quad \operatorname{tg} \varphi_E = \frac{R \operatorname{tg} \varphi_K \pm \varepsilon}{R \pm \varepsilon \operatorname{tg} \varphi_K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \pm \frac{\varepsilon}{g}; \; f^2 = \varepsilon^2 + g^2$$

Der Winkel φ_K wird im ersten Falle kleiner, im zweiten Falle größer als φ_E, d. h. der Punkt A' liegt im ersten Fall oberhalb, im zweiten Fall unterhalb der reellen Achse.

Angenähert kann man in beiden Fällen setzen

$$\operatorname{tg} (\varphi_E - \varphi_K) = \pm \frac{\varepsilon}{R} \cos 2 \varphi_E \sim \pm \frac{\varepsilon}{R}.$$

Für zwei weitere Fälle ist $\vartheta = \pm 60^0$ angenommen. Dann wird

$$\operatorname{tg} \varphi_K = \frac{\operatorname{tg} \varphi_E (4R - 3\varepsilon) \mp 2 \varepsilon \sqrt{3}}{4R + 3\varepsilon \mp \operatorname{tg} \varphi_E \, 2 \varepsilon \sqrt{3}}, \; \operatorname{tg} 2\gamma = \mp \frac{\varepsilon \sqrt{3}}{2g - \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

$$f^2 = \varepsilon^2 + g^2 - \varepsilon g$$

Für $\vartheta = 90^0$ wird

$$\operatorname{tg} \varphi_K = \frac{R - \varepsilon}{R + \varepsilon} \operatorname{tg} \varphi_E, \; r = 0, \; f = g - \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Profil-Nr.	l	ε	ϑ	$\operatorname{tg} \varphi_E$	φ_E	φ_K	γ	$\varphi = \varphi_K - \gamma$	f	π
I.	5	0,8	45^0	0,2	$11^0\,30'$	$1^0\,54'$	$5^0\,4{,}5'$	$-3^0\,10{,}5'$	4,53	0,50
II.	5	0,8	45^0	0,1	$5^0\,43'$	$-2^0\,29'$	$5^0\,4{,}5'$	$-7^0\,33{,}5'$	4,53	1,18
III.	5	0,5	45^0	0,1	$5^0\,43'$	$0^0\,37'$	$3^0\,12'$	$-2^0\,35'$	4,49	0,40
IV.	5	0,47	45^0	0,136	$7^0\,45'$	3^0	3^0	0	4,5	0
V.	5	0,3	45^0	0,1	$5^0\,43'$	$2^0\,40'$	$1^0\,55'$	$0^0\,45'$	4,47	0,116
VI.	5	0,4	-45^0	0,19	$10^0\,45'$	$14^0\,25'$	$-2^0\,32{,}5'$	$16^0\,57{,}5'$	4,48	2,49
VII.	5	0,4	-45^0	0,1	$5^0\,43'$	$9^0\,40'$	$-2^0\,32{,}5'$	$12^0\,12{,}5'$	4,48	1,85
VIII.	5	0,3	60^0	0,1	$5^0\,43'$	$2^0\,45'$	$1^0\,43{,}5'$	$1^0\,1{,}5'$	4,32	0,16
XI	5	0,3	-60^0	0,1	$5^0\,43'$	$7^0\,56'$	$-1^0\,43{,}5'$	$9^0\,39{,}5'$	4,32	1,43
X.	5	0,3	$\pm 90^0$	0,15	$8^0\,32'$	$7^0\,41'$	0	$7^0\,41'$	4,16	1,10

In den Zeichnungen (Abb. 5 bis 14) sind die wichtigsten geometrischen Charakteristika eingezeichnet (Mittelpunkt M_0, Ellipse E, Staupunkte A' und A'', Achsen, Brennpunkt, Auftriebsparabel usw.). Man sieht deutlich den Einfluß der Größe der Exzentrizität und der Lage der Ellipsenachsen auf die Formgebung des Profils. Für drei typische Profile (III, VII, X) sind außerdem die Nullstellen und Pole der Derivierten der Abbildungsfunktion markiert.

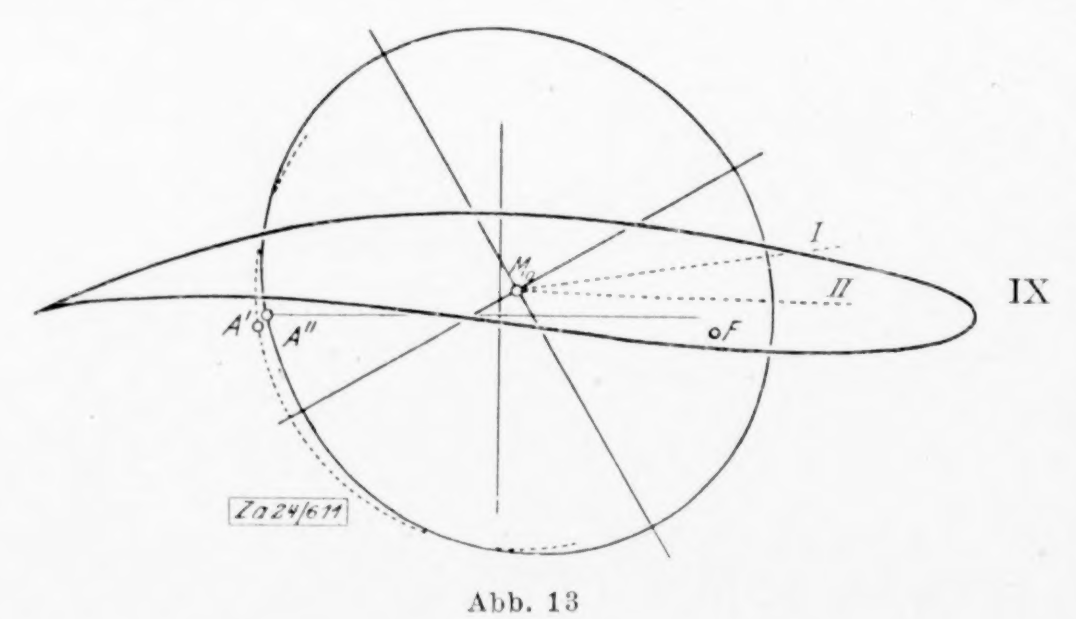


Abb. 13

5. Stabilität und Labilität des Flügels.

Für die Beurteilnng der Wirkungsweise des Profils wird es nun wesentlich ankommen auf den Winkel $\varphi_K - \gamma$ zwischen der 1. und 2. Profilachse. Wenn $\varphi_K > \gamma$ ist, so haben wir den normalen Fall, wie er auch in der Profilsammlung (Heft 4 dieser Zeitschrift) zugrunde gelegt wurde. Der Brennpunkt F und damit die Auftriebs-

parabel, deren Tangenten die Wirkungslinien des Auftriebs der zyklischen Strömung darstellt, liegt unterhalb der durch M_0 gezogenen 2. Achse des Profils. Wenn dagegen $\varphi_K < \gamma$ ausfällt, so öffnet sich die Auftriebsparabel in dem Gebiet oberhalb des Profils. Die 3. Achse, die übrigens angenähert die Richtung der Verbindungslinie der Stellen größter Umfangsgeschwindigkeit im Falle eines verschwindenden Auftriebs $\beta + \varphi_K$ hat, ist für $\varphi_K > \gamma$ gegen die nach hinten gehende Richtung der 2. Achse oberhalb unter einem spitzen Winkel, für $\varphi_K < \gamma$ unter einem stumpfen Winkel geneigt. Im Falle $\varphi_K = \gamma$ steht die dritte Achse[1]) senkrecht zur 1. und 2. Achse[1]).

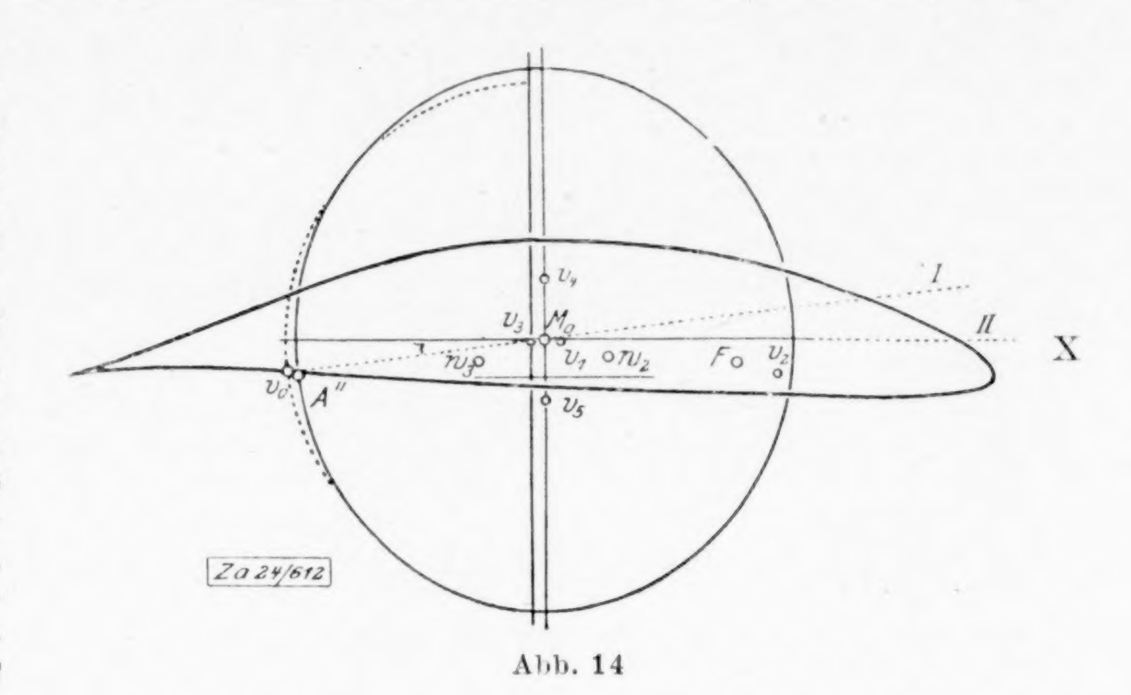


Abb. 14

Aus der Lage der Auftriebsparabel ergibt sich aber ein typischer Unterschied in der Art der Druckpunktswanderung, die wie folgt auch rechnerisch bestimmt werden kann. Nach Mises beträgt das Moment $\mathfrak{M}'$ bezogen auf den Mittelpunkt

$$\mathfrak{M}' = 2\,\pi\,\varrho\,V^2_\infty\,R\,f\,\sin 2\,(\beta + \gamma) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

und der Hebelarm

$$h = \frac{f}{2}\,\frac{\sin 2\,(\beta + \gamma)}{\sin\,(\varphi_K + \beta)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24\,\mathbf{a}),$$

daraus folgt dann[2]), daß im Bereich der verwendbaren Anstellwinkel $\frac{d\,h}{d\,\beta} \lesseqgtr 0$ ist, je nachdem $\varphi_E \lesseqgtr \gamma$. Die Angriffslinie des Auftriebs wandert also im ersteren Falle mit zunehmenden β nach vorne, im zweiten Falle nach rückwärts. Man sieht diesen Unterschied besonders deutlich, wenn man den Abstand der Auftriebslinie von der Profilspitze

$$s_A = \frac{f}{2}\,\frac{\sin 2\,(\beta + \gamma)}{\sin\,(\varphi_K + \beta)} + l\,\cos\beta + r_A\,\cos\,(\varphi_E + \beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

resp. den Abstand des Schnittpunktes der Auftriebslinie von der reellen Bezugsachse.

$$\sigma_A = \frac{f}{2}\,\frac{\sin 2\,(\beta + \gamma)}{\sin\,(\varphi_K + \beta)\cos\beta} + l + r_A\,\frac{\cos\,(\varphi_E + \beta)}{\cos\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (25\,\mathrm{a})$$

in Abhängigkeit von β (als Ordinate) graphisch aufträgt, wie das für die Profile III und VII geschehen ist (vergl. Abb. 17). Im ersten Falle geht die Nullinie auf dem entfernt liegenden, negativen Werten von β entsprechenden Zweig ins Unendliche und kehrt auf der anderen Seite aus dem Unendlichen zurück. Das Gebiet starker Empfindlichkeit, das von $-\varphi_K$ bis γ reicht, ist hier ziemlich groß. Etwas

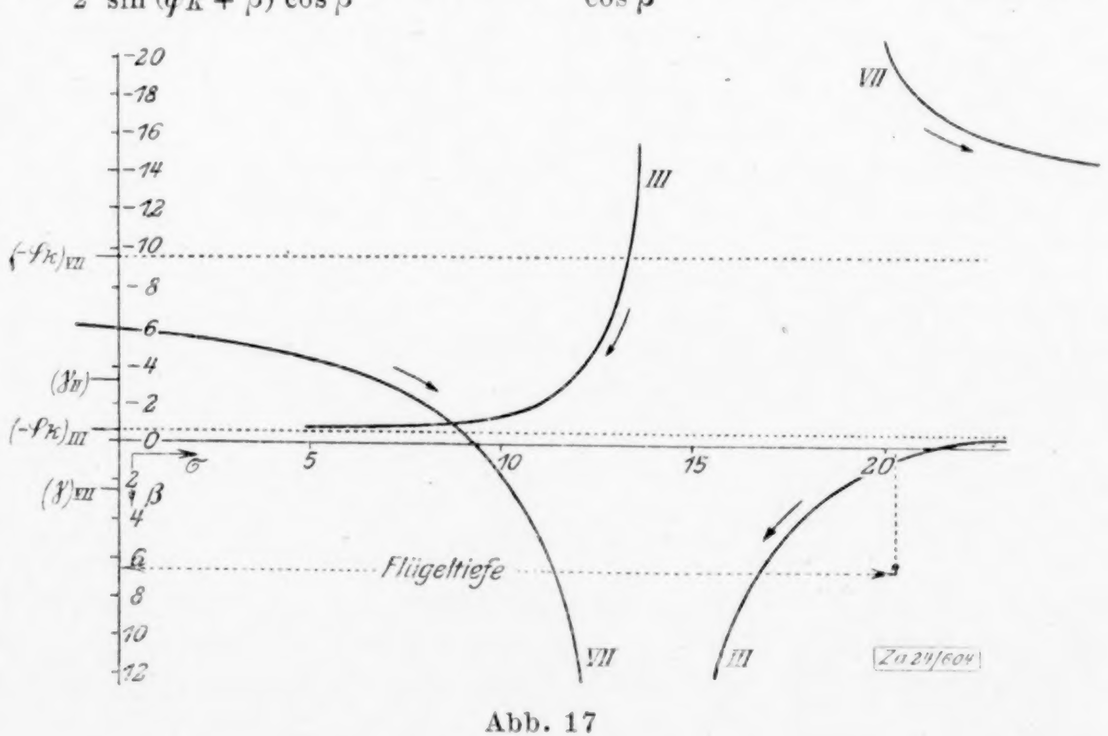


Abb. 17

[1]) Vergl. Wilh. Müller, Bd. 3, Heft 2 (1924) dieser Zeitschrift.
[2]) Vergl. Geckler, a. a. O., S. 13.

hinter der Mitte des Profils durchschneidet die Kurve die σ-Achse. Im zweiten Falle, in dem übrigens die Differenz $\gamma - \varphi_K$ kleiner ist, zeigt die σ-Kurve einen direkt entgegengesetzten Verlauf, der den positiven Werten von β entsprechende Zweig liegt hier am vorderen Ende des Profils.

Wir stellen uns vor, daß das »fliegende System« nur aus einem Flügel besteht. Dann wird der Schwerpunkt jedenfalls eine solche Lage haben, daß der Flügel bei einem bestimmten Anstellwinkel im Gleichgewicht sich befindet. Nun ist für ein stabiles Verhalten erforderlich, daß bei einer zufälligen, durch irgend einen äußeren Anlaß bewirkte Vergrößerung des Anstellwinkels ein kopflastig wirkendes (Kipp-) Moment entsteht, daß jene Auslenkung rückgängig zu machen strebt, wogegen im labilen Fall das geweckte aufrichtende Moment jene aufgezwungene Wirkung noch unterstützt. Da aber vom Falle des Gleichgewichts aus betrachtet die Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \beta} = \frac{\partial (\mathfrak{A}\, a)}{\partial \beta} = \mathfrak{A} \frac{\partial a}{\partial \beta} + a \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \beta} \quad (a \text{ Arm des Auftriebs } \mathfrak{A} \text{ in bezug auf den Schwerpunkt})$$

übergeht in

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \beta} = \mathfrak{A} \frac{\partial a}{\partial \beta} \quad (\mathfrak{A} = \text{Gewicht}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26),$$

so ist für die Stabilität das Vorzeichen von $\frac{\partial a}{\partial \beta}$ oder von $\frac{\partial h}{\partial \beta}$ resp. $\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}$ entscheidend.[1] Es folgt daraus, daß die Differenz $\varphi_K - \gamma$ als Maß für die Eigenstabilität des Flügels angesehen werden kann. $\varphi_K < \gamma$ bedeutet stabiles, $\varphi_K > \gamma$ labiles Verhalten.

Praktisch würde die Erhöhung der Eigenstabilität des Flügels durch Verringerung der Differenz $\varphi_K - \gamma$ allerdings dadurch beschränkt sein, daß der Auftrieb im allgemninen geringer ausfällt und die verbogene Gestalt des Profils einen größeren Widerstand infolge verstärkter Wirbelbildung zur Folge hat.

Im indifferenten Falle $\varphi_K = \gamma$ geht die Auftriebsparabel über in ein Strahlenbüschel durch den Brennpunkt des Profils, so daß auch nur eine geringe Verschiebung des Druckpunktes auf einer nicht durch F gehenden Achse eintritt. Zur Konstruktion eines solchen Falles berechnet man nach Festsetzung von $\varphi_K = \gamma$, R und l aus den Gleichungen (16) die Größe ε

$$\varepsilon = \frac{g \sin 2\gamma}{\sin 2(\vartheta - \gamma)},$$

ferner φ_E und $r_{A'}$ aus den Formeln (16) und (20). Wir haben die Werte $R = 5$, 6, $l = 5$, $\varphi_K = \gamma = 3^0$, $\vartheta = 45^0$, zu Grunde gelegt und daraus das schwach **S**-förmig gekrümmte Profil IV erhalten.

6. Der Winkel φ und das System der gleichwertigen Profile. Um das analytische Kriterium für das zu erwartende stabile oder instabile Verhalten zu gewinnen, bilden wir den Ausdruck für $\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_K - \gamma)$. Setzt man zunächst der Einfachheit halber $\operatorname{tg} \vartheta = \tau$, $\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi_E) = \lambda$, so erhalten wir

$$\operatorname{tg} 2\varphi_K = \frac{2(b + a\lambda\tau)(b\tau - a\lambda)}{(a\lambda\tau + b)^2 - (a\lambda - b\tau)^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2\tau(a - b)}{2g(1 + \tau^2) - (a - b)(\tau^2 - 1)}.$$

Es kommt daher

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2g(a\lambda\tau + b)(b\tau - a\lambda) - ab(a - b)\lambda(\tau^2 + 1)}{2g(a\lambda\tau + b)^2 - (\tau b - a\lambda)^2 - (a - b)(\tau^2 + 1)(a^2\lambda^2 - b^2)}.$$

Führt man wieder die ursprünglichen Ausdrücke ein und setzt $a = R + \varepsilon$, $b = R - \varepsilon$, so wird

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{g[R^2 \sin 2\varphi_E - 2R\varepsilon \sin 2\vartheta + \varepsilon^2 \sin(4\vartheta - 2\varphi_E)] - \varepsilon(R^2 - \varepsilon^2)\sin 2(\vartheta - \varphi_E)}{g[R^2 \cos 2\varphi_E - 2R\varepsilon \cos 2\vartheta + \varepsilon^2 \cos(4\vartheta - 2\varphi_E)] + \varepsilon[(R^2 + \varepsilon^2)\cos 2(\vartheta - \varphi_E) - 2R\varepsilon]} \quad (27).$$

Da die Größen φ_E und ε in den praktisch in Betracht kommenden Fällen klein sind, so sieht man, daß der Nenner des Ausdrucks immer positiv ausfällt. $\varphi_K - \gamma$ wird also $\lesseqgtr 0$, je nachdem

$$g[R^2 \sin 2\varphi_E - 2R\varepsilon \sin 2\vartheta + \varepsilon^2 \sin(4\vartheta - 2\varphi_E)] \lesseqgtr \varepsilon(R^2 - \varepsilon^2)\sin(\vartheta - \varphi_E) \quad . (27\text{a})$$

ist. Wenn $\varepsilon = 0$ wird, so wird daraus $\varphi_E = \varphi_K = \varphi \lesseqgtr 0$, wie zu erwarten war.

[1] Vergl. Fuchs-Hopf, Aerodynamik 1922, S. 314.

Ist $\vartheta = 45^0$, so werden die drei Fälle durch

$$g\,[(R^2+\varepsilon^2)\sin 2\,\varphi_E - 2\,R\,\varepsilon] \lesseqgtr \varepsilon\,(R^2-\varepsilon^2)\cos 2\,\varphi_E \quad \ldots \quad (27\,\text{b})$$

für $\vartheta = -45^0$ durch

$$g\,[(R^2+\varepsilon^2)\sin 2\,\varphi_E + 2\,R\,\varepsilon] \lesseqgtr -\varepsilon\,(R^2-\varepsilon^2)\cos 2\,\varphi_E \quad \ldots \quad (27\,\text{c})$$

unterschieden.

Um eine Einsicht in den gesamten Verlauf der Funktion

$$R^2\sin 2\,\varphi_E - 2\,R\,\varepsilon\sin 2\,\vartheta + \varepsilon^2\sin(4\,\vartheta - 2\,\varphi_E) - \frac{\varepsilon}{g}\,(R^2-\varepsilon^2)\,2\,(\vartheta-\varphi_E) = f_1 - f_2$$

in Abhängigkeit von ϑ zu erhalten, haben wir die Teilfunktionen f_1 und f_2 bei festem R und ε ($R = 5{,}6$, $\varepsilon = 0{,}4$) für zwei verschiedene Winkel φ_E ($\sin 2\,\varphi_E = 0{,}1$ und $\sin 2\,\varphi_E = 0{,}2$) graphisch aufgetragen (Abb. 18). Man sieht, daß für negative ϑ immer $\varphi_K > \gamma$ ist, wenn φ_E als positiv vorausgesetzt wird, während im mittleren Teil des Intervalls $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ im allgemeinen ein Gebiet mit $\varphi_K < \gamma$ existiert, das um so größer ist, je kleiner φ_E wird. Die beide Bereiche trennenden zwei Schnittpunkte von f_1 und f_2 würden den beiden zu den festen Werten von R, ε, g, φ_E gehörenden indifferenten Fällen entsprechen.

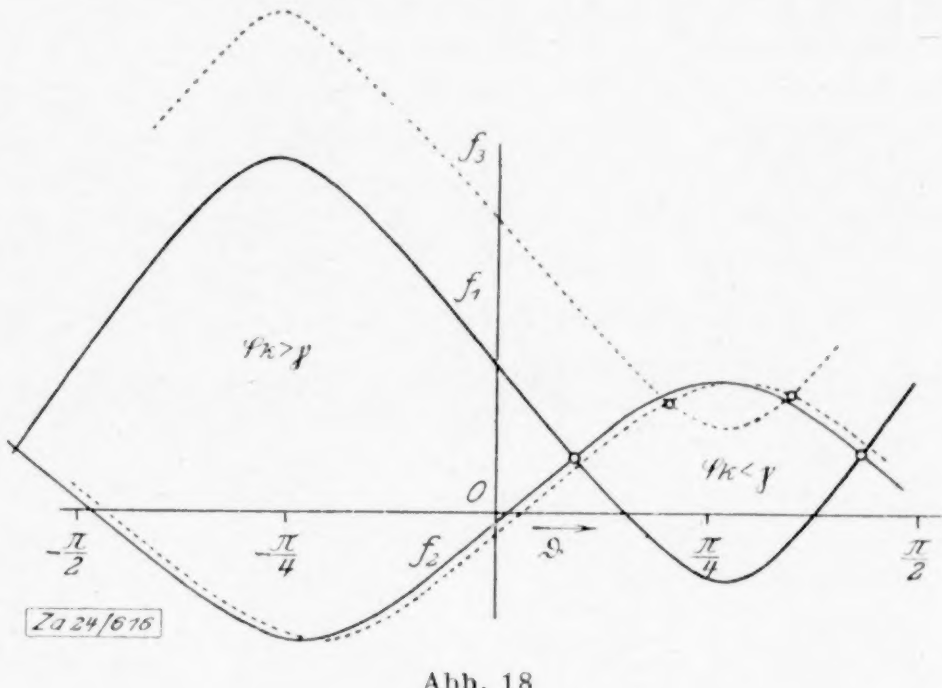


Abb. 18

Um den Ausdruck (28) geometrisch zu analysieren, beachte man, daß er auf die Form

$$\operatorname{tg} 2\,\varphi = \frac{r'^2\,(g\sin 2\,\chi_1 - \varepsilon\sin 2\,\chi_2)}{r'^2\,(g\cos 2\,\chi_1 - \varepsilon\cos 2\,\chi_2)} \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

gebracht werden kann. $r'^2 = (R+\varepsilon)^2\sin^2(\vartheta-\varphi_E) + (R-\varepsilon)^2\cos^2(\vartheta-\varphi_E)$ ist das Quadrat des dem Grundkreisargument $\frac{\pi}{2} - (\vartheta - \varphi)$ entsprechenden Radiusvektors der Ellipse, χ_1 ist der Winkel zwischen r' und der y-Achse im 2. System, χ_2 der Winkel zwischen r' und der großen Achse von E. Da die Summe der Quadrate der Klammerausdrücke $= g^2 + \varepsilon^2 + 2\,g\,\varepsilon\cos(\chi_1 - \chi_2) = f^2$ ist, so stellen sie selbst das Lot von F auf der ersten Achse resp. den Abstand jenes Fußpunktes von M_0 dar. Setzt man $\operatorname{tg} 2\,\varphi = \frac{A}{B}$, so wird

$$\cos 2\,\varphi = \frac{B}{f\cdot r'^2}\,;\ \sin 2\,\varphi = \frac{A}{f\cdot r'^2} \quad \ldots \ldots \quad (29).$$

Das System der drei Invarianten R, f, φ charakterisiert in theoretischer Hinsicht vollkommen die Auftriebswertigkeit des Profils. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß es eine ∞^2-fache Mannigfaltigkeit von gleichwertigen Profilen gibt, die aus dem Kreise durch Vermittlung der Ellipse ableitbar sind. Sind also außerdem noch zwei der geometrischen Bestimmungsstücke, etwa ε und g gegeben, so läßt sich das zugehörige Profil resp. eine beschränkte Anzahl von solchen Profilen konstruieren. Man berechne zunächst den Winkel ϑ und γ aus den Gleichungen

$$\cos 2\,\vartheta = \frac{f^2 - g^2 - \varepsilon^2}{2\,\varepsilon\,g}\,;\ \operatorname{tg} 2\,\gamma = \frac{\varepsilon\sin 2\,\vartheta}{\varepsilon\cos 2\,\vartheta + g}\ \text{oder}\ \sin 2\,\gamma = \frac{\varepsilon\sin 2\,\vartheta}{f}$$

und gewinnt damit die Werte von $\varphi_K = \varphi + \gamma$ und φ_E aus (15) und (16). Man erhält jedesmal 2 Profile, je nachdem man den positiven oder negativen Wert von ϑ zugrunde legt.

Die Konstruktion verläuft nach Anleitung der Fig. 4. Man trägt an die Halbierungslinie des Winkels $G\,M_0\,E$ des Ausgangsdreiecks mit den Seiten f, ε, g, den Winkel φ an und erhält damit den Punkt A' von K_g, somit auch, weil die große Achse der Ellipse parallel zur Halbierungslinie des Winkels $B\,G\,E$ bekannt ist, den Punkt A'' der Ellipse, den Bildpunkt der Profilspitze in der Ellipsenebene. Die Parallele durch A'' zu $G\,M_0$ und

die Senkrechte im Abstande $l = \sqrt{R \cdot g}$ von A'' bestimmen die Bezugsachsen, womit das Profil punktweise gezeichnet werden kann. Ganz entsprechend verfährt man, wenn statt ε und g zwei andere Elemente gegeben sind.

Wir haben zwei gleichwertige Profile mit den Grundgrößen $R = 5{,}6$, $f = 4{,}28$, $\varphi = 5^0$ gezeichnet (Abb. 15, 16) und die charakteristischen Invarianten zusammengestellt.

Profil-Nr.	R	f	φ	ϑ	γ	ε	l	φ_E	φ_E
XI	5,6	4,28	5^0	60^0	$2^0\,56'$	0,5	5	$7^0\,56'$	13^0
XII	5,6	4,28	5^0	45^0	$2^0\,1'$	0,3	4,88	$7^0\,1'$	$10{,}5'$

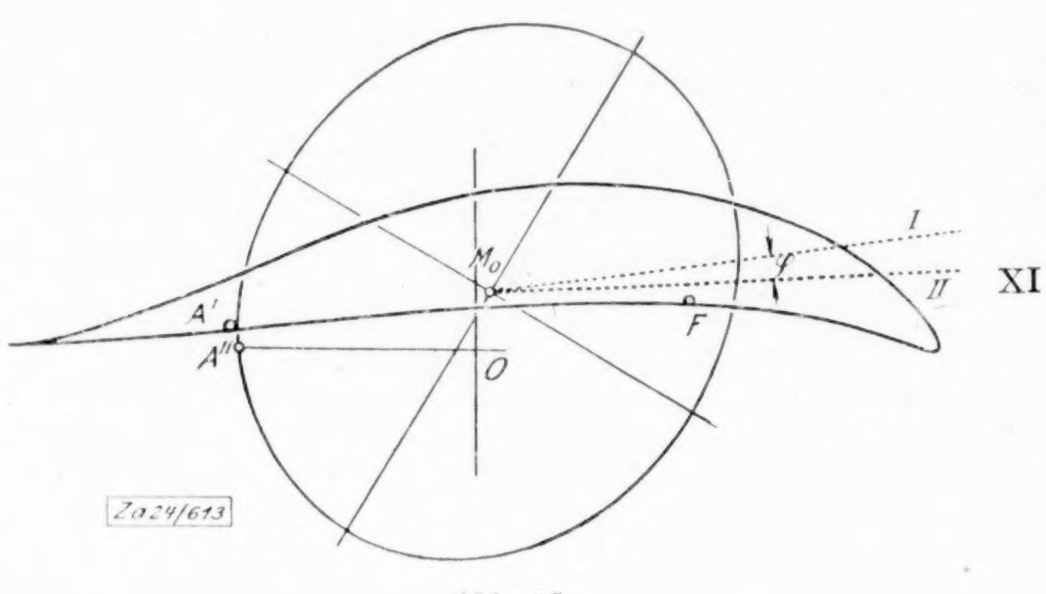


Abb. 15

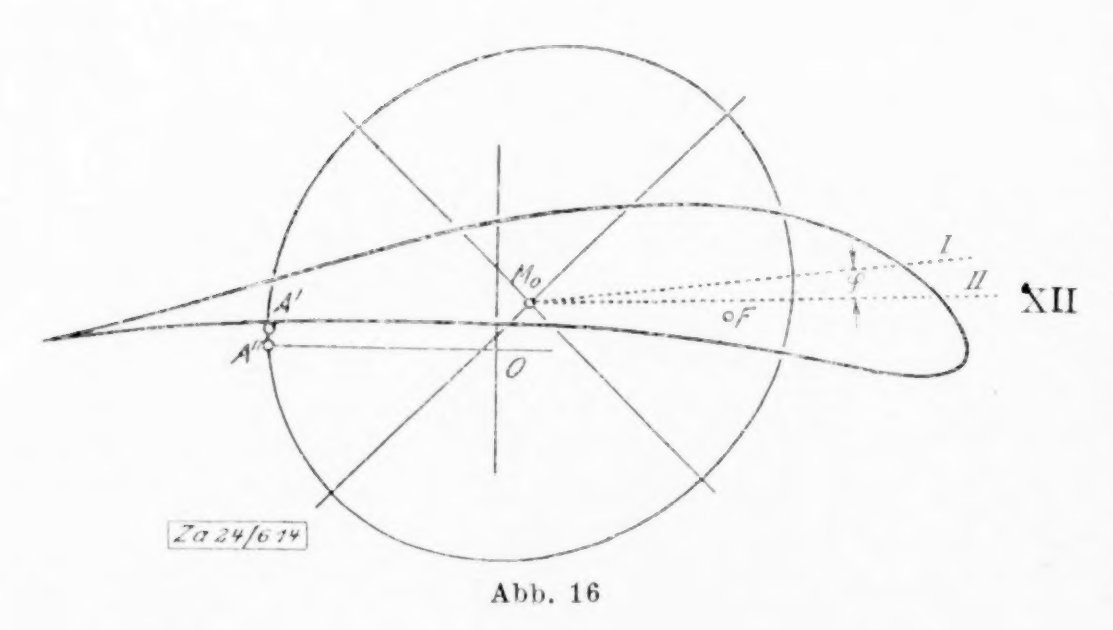


Abb. 16

Bemerkenswert ist die beim ersten Profil auftretende scharfe Krümmung des Vorderendes, die damit zusammenhängt, daß die Nullstelle A von $\frac{dz}{d\zeta'}$, v_2 in unmittelbare Nähe des Kreisrandes rückt.

7. Geschwindigkeits- und Druckverteilung längs des Profils. Wie in der Dissertation von Geckeler auseinandergesetzt wird, kann man die Strömungsgeschwindigkeit V am Profil und daher auch den Druck durch zweimalige Anwendung der von Trefftz[1]) für das Joukowskysche Profil angegebenen graphischen Konstruktion ermitteln.

Die Absolutgeschwindigkeit der Strömung um den Kreis an der Stelle P kann, wenn mit H der Abstand des Punktes P von der durch den Staupunkt gelegten Zustromrichtung, mit V_∞ die Geschwindigkeit der Strömung im ∞ bezeichnet wird, in der Form

$$V_K = 2\, V_\infty \frac{H}{M_0\, P}$$

Bedeutet nun P_1 den im ersten System dem Punkte P auf K durch $\frac{R\,\varepsilon}{\zeta'}$ entsprechenden »reziproken« Punkt auf K_ε, ebenso Q den aus dem Kreise entstehenden Punkt der Ellipse E und Q_1 seinen reziproken Punkt im 2. System, so hat man

$$\frac{d\,z''}{d\,\zeta'} = \frac{P\,P_1}{M_0\,P}\,; \qquad \frac{d\,z}{d\,z'} = \frac{Q\,Q_1}{O\,Q}\,;$$

daraus leitet sich die Strömungsgeschwindigkeit V_c längs des Profils C her.

$$V_c = V_K \frac{d\,\zeta'}{d\,z''} \cdot \frac{d\,z'}{d\,z} = 2\, V_\infty \frac{H \cdot O\,Q}{P\,P_1 \cdot Q\,Q_1}\,.$$

[1]) E. Trefftz, Graphische Konstruktion Joukowskischer Tragflächen, Zeitschr. f. Flugt. 4, (1913), S. 130.

Wegen der Bernoullischen Beziehung

$$\frac{p - p_\infty}{\gamma} = \frac{V^2_\infty}{2g} - \frac{V^2}{2g} = \frac{V^2_\infty}{2g}\left(1 - \frac{V^2}{V^2_\infty}\right)$$

erhält man daraus, wie bekannt, das Druckdiagramm mit $\frac{\gamma}{2g} V^2_\infty$ als Einheit, wenn man

$$\frac{V^2}{V^2_\infty} = \left(\frac{2H \cdot \overline{OQ}}{\overline{PP_1} \cdot \overline{QQ_1}}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

als Ordinate senkrecht zur Zuströmrichtung in Abhängigkeit von der Profilabzisse, gemessen parallel zu jener Richtung, aufträgt[1]). Diese Darstellung ist durchgeführt worden für die Profile III, IV, VII (Abb. 19—21). Die in der Angabe auf die 2. Achse bezogenen Anstellwinkel würden gegen die untere Profiltangente gemessen, resp. die Werte 6°, 17°; 6°, 8° erhalten.

Man sieht zunächst im stabilen Fall die im Bereiche des normalen Anstellwinkels auftretende charakteristische Schleife der Druckkurve, die zum Ausdruck bringt, daß im

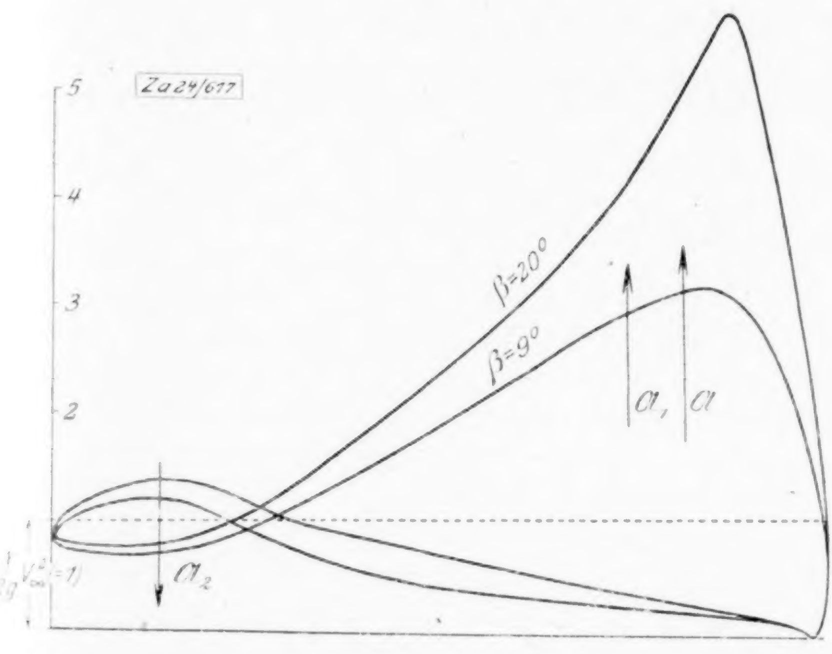


Abb. 19

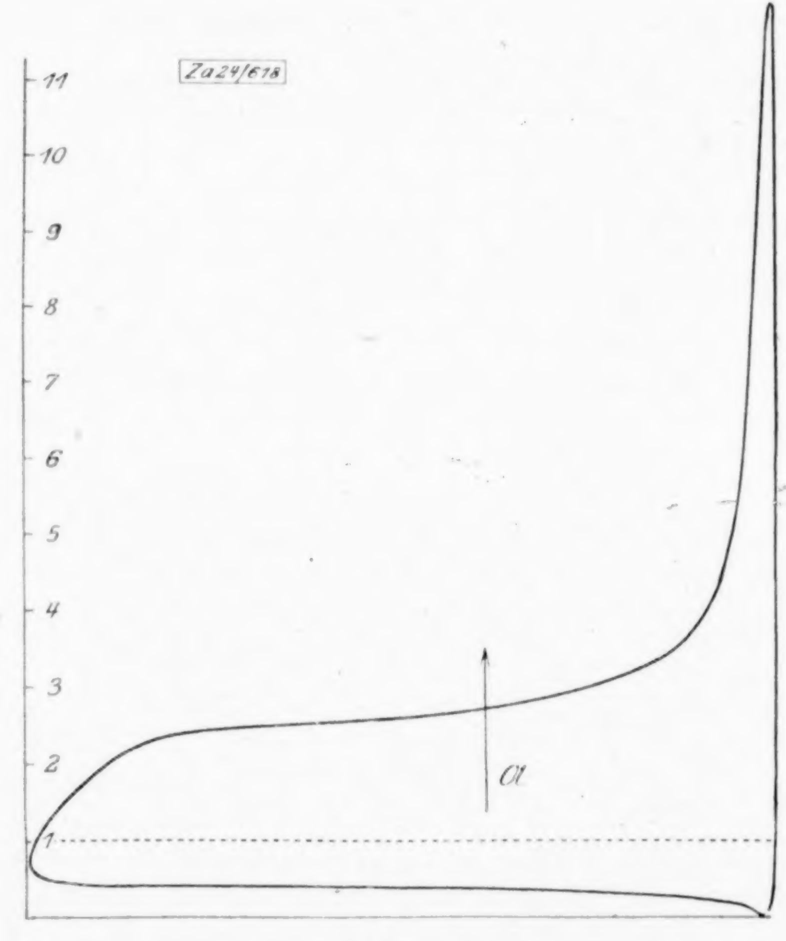


Abb. 20

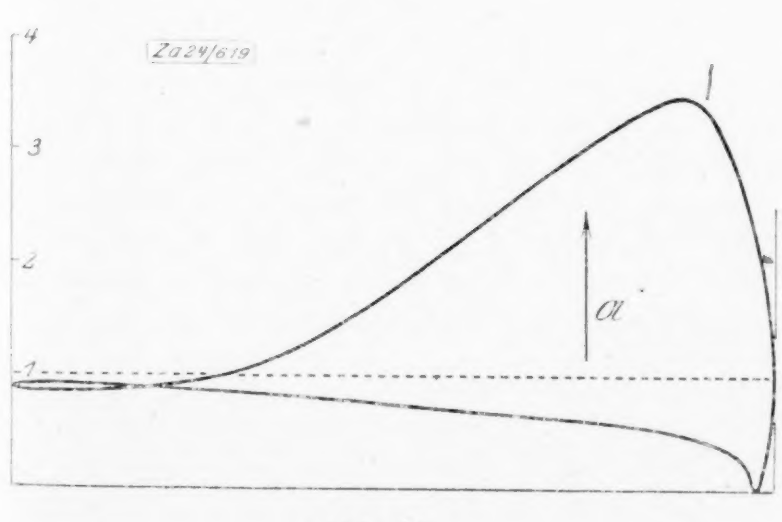


Abb. 21

hinteren Teile des Profils ein Abtrieb $\mathfrak{A}_2$ auftritt, der zu einer Verringerung des Gesamtauftriebs und zu einer Verlegung seiner Angriffslinie nach vorne führt. Gegenüber dem entgegengesetzten Fall, in dem auf der Saugseite nach vorne ein jähes Maximum auftritt, rückt hier die im flacheren Anstieg erreichte Stelle des größten Unterdruckes weiter nach der Mitte zu. Abgesehen von diesem Maximum, ist das Druckdiagramm für das labile Profil durch eine größere Gleichmäßigkeit charakterisiert, d. h. durch eine angenähert gleichbleibende Beteiligung des Saugdrucks und des Ueberdrucks längs der Tiefe des Flügels. Im indifferenten Fall liefert die dem hinteren Profilabschnitt zugehörige Druckfläche nur einen geringfügigen Beitrag zum Gesamtauftrieb.

---

[1]) Vergl. etwa A. Pröll, Flugtechnik, München 1919, S. 103.

8. Eckenprofile, die durch Vermittlung der Ellipse konstruierbar sind. Um Eckenprofile zu erhalten, kann man die 2. Transformationsgleichung $z = z' + \frac{Rg}{z'} = z' + \frac{l^2}{z'}$ ersetzen durch

$$\frac{z - k\,l}{z + k\,l} = \frac{(z' - l)^k}{(z' + l)^k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31),$$

wo l dieselbe Bedeutung haben möge wie früher und k eine Zahl > 1 und < 2 ist. Der Eckpunkt des Profils hat dann die Koordinate $-k\,l$ und der Eckenwinkel, d. h. der Winkel zwischen den Tangenten im Eckenpunkt hat den Wert $\delta = \pi\,(2 - k)$ [1]). Diese Hinzufügung des neuen Parameters k findet bei festem Grundkreisradius zu einer ∞^5-fachen Mannigfaltigkeit von Formen. Unter Beibehaltung der oben eingeführten Bestimmungsgrößen erhält man aus

$$z = z' + \frac{l^2\,(k^2 - 1)}{3\,z'} + \ldots$$

die Entwickelung

$$z = \zeta + \frac{R\left(\varepsilon\, e^{2i\vartheta} + g\,\frac{k^2 - 1}{3}\right)}{\zeta} + \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32).$$

An Stelle von l und g in der früheren Reihe treten also

$$l'^2 = l^2\,\frac{k^2 - 1}{3}, \qquad g' = g\,\frac{k^2 - 1}{3} \quad \ldots \ldots \quad (33).$$

Da $g' < g$ wird, so folgt, daß der Winkel γ, der aus

$$\operatorname{tg} 2\,\gamma = \frac{\varepsilon \sin 2\,\vartheta}{\varepsilon \cos 2\,\vartheta + g'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

zu bestimmen ist, größer ausfällt als im Falle $k = 2$. Die Brennweite f wird dagegen kleiner, was mit der Erhöhung der Dicke zusammen stimmt. Die Stabilität wird also vergrößert durch eine Verdickung.

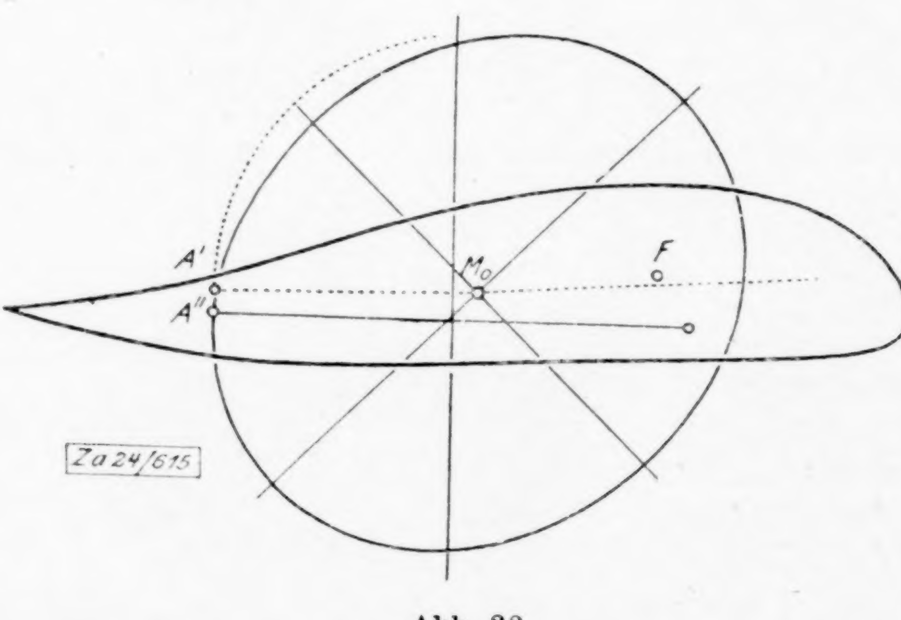


Abb. 22

Wir haben die Grundabmessungen des Profils III zu Grunde gelegt und daraus mit $k = 1{,}88$ ein Eckenprofil (Abb. 22) abgeleitet, dem folgende charakteristische Konstanten zukommen.

ε	l	g'	ϑ	φ_E	φ_K	γ	φ	f
0,5	5	3,76	45°	5° 43'	0° 37'	3° 47,5'	− 3° 10,5'	3,8

Auf ein ausführliches Eingehen auf den allgemeinen Fall $k \neq 2$ muß hier verzichtet werden. 382

[1]) Vergl. Wilh. Müller, a. a. O. S. 214.

Über den Wärmeübergang im Zylinder von Kolbenmaschinen.

Von **KARL F. HERZFELD** in München.

1. Einleitung. Die zahlreichen experimentellen Untersuchungen [1]) über den Wärmeübergang zwischen bewegten Gasen und festen Wänden haben immer mehr gezeigt, daß es unrichtig ist, mit festen Wärmeübergangszahlen zu rechnen, da deren Größe durchaus von den Strömungsverhältnissen abhängt. Die strenge Berechnung turbulenter Strömungen wirklicher Gase (d. h. mit Berücksichtigung der Reibung) bietet große Schwierigkeiten, die aber eine angenäherte Durchrechnung auf Grund der Prandtl-Kármánschen Grenzschichttheorie [2]) zu umgehen gestattet. Der Grundgedanke dieser Theorie besteht darin, daß man im strömenden Gas zwei Gebiete zu unterscheiden hat: erstens einen ungestörten Teil, in welchem sich das Gas im Groben, d. h. ohne Rücksicht auf die einzelnen Wirbel, so bewegt, als gäbe es keine Reibung; zweitens eine an der Wand anliegende Grenzschicht, in welcher die Geschwindigkeit von ihrem Wert U im ungestörten Teil auf den Wert 0 nach einem Gesetz absinkt, das der Erfahrung entnommen ist (unsere Formel 2), ebenso wie der Wert (18) der Schubspannung auf die Wand. Der Druck in der Grenzschicht soll gleich sein dem Druck im benachbarten Teil der ungestörten Bewegung (unsere Formel 3). Die Dicke der Grenzschicht δ, die von Ort zu Ort wechselt, berechnet sich dann aus der Erhaltung des Impulses in der Grenzschicht. Betrachtet man nämlich einen Abschnitt derselben, so kann sich in ihm der Impuls auf folgende Weise ändern: Es kann die Strömung in der Grenzschicht in dem betreffenden Abschnitt mehr Impuls herein- als hinaustragen, es kann an der Grenze gegen den ungestörten Teil Impuls einströmen, endlich wird durch das Druckgefälle, das in Grenzschicht und ungestörtem Teil gleich ist, sowie durch die Schubspannung an der Wand Impuls übertragen. Diese einzelnen Summanden ergeben eine Gleichung (Formel 1), die die Bestimmung der Grenzschichtdicke und damit der Strömung an der Wand ermöglicht. Der Wärmeübergang wird hiermit nun durch den Gedanken [3]) verknüpft, daß sowohl die Wärme als auch der Impuls (die Schubspannung) im Wesentlichen durch denselben Mechanismus übertragen werden, nämlich durch eine Art unregelmäßiger Konvektion von seiten der im Einzelnen unkontrollierbaren Wirbel in der turbulenten Strömung. Da die Größe der Schubspannung in Abhängigkeit von den Strömungsverhältnissen, wie oben erwähnt, aus der Erfahrung entnommen werden kann, ist es dann leicht, den damit verbundenen Wärmetransport anzugeben (unsere Formeln 17 und 18). Diese Folgerungen stimmen nach Latzko (l. c.) gut mit dem stationären Wärmeübergang von Gasen, die durch Rohre strömen, überein.

Diese Grundzüge der Theorie, die bisher nur auf stationäre Strömung längs Platten oder durch Röhren angewandt wurde, sollen nun hier auf Anregung meines Bruders, Dr.-Ing. August Herzfeld, dem ich hierfür zu großem Dank verpflichtet bin, auf die nichtstationäre Strömung, wie sie im Zylinder von Kolbenmaschinen auftritt, übertragen und die zugehörigen Gleichungen integriert werden. Die Anwendung der Theorie auf Verpuffungsmaschinen, die Durchrechnung von Beispielen und die sich daraus ergebenden praktischen Schlußfolgerungen finden sich in der an anderer Stelle erscheinenden ausführlichen Arbeit von A. Herzfeld. Dort ist auch der Vergleich dieser theoretisch gefundenen Resultate mit den inzwischen erschienenen Untersuchungen [4]) Nusselts gezogen, dessen Formeln aus Versuchen an Gasmaschinen gewonnen wurden.

2. Die Strömung. Wir müssen uns das an sich sehr komplizierte Problem so weit als möglich vereinfachen. Es sei ein Zylinder von der Bohrung $2r$ und der Höhe l_{max} gegeben, in dem sich ein Kolben bewegt. Hat die wirkliche Maschine einen kompliziert geformten Kompressionsraum, so müssen wir diesen durch einen »theoretischen« rein zylindrischen ersetzen (da sich nur in einem solchen die Strömungen berechnen lassen), und zwar vom gleichen Volum wie es der wahre hat, damit wir die Aenderung der Gasdichte einfach berücksichtigeu können. Ferner wollen wir die Gasmenge als konstant voraussetzen, d. h. unsere Rechnung gilt nur, so lange die Ventile geschlossen sind. Die

---

[1]) Literatur s. bei H. Latzko, diese Z. 1921, 1, 269.

[2]) L. Prandtl, Verh. Math. Kongr. 1904 (Heidelberg), Leipzig 1905, S. 484, Th. v. Kármán, diese Z. 1921, 1, 233, auch separat als Abh. aus d. aerodyn. Inst. a. d. Techn. Hochsch. Aachen I.

[3]) L. Prandtl, Phys. Z. 1910, 11, 1072, Th. v. Kármán, H. Latzko, l. c.

[4]) W. Nusselt, Z. V. D. Ing. 1923, 697.

Krümmung der Grenzschicht infolge der Zylinderkrümmung vernachlässigen wir und behandeln das Problem als ebenes, weil die Grenzschichtdicke praktisch neben dem Zylinderradius sehr klein ist. Die Dichte ϱ setzen wir im ganzen Zylinder gleich und als den Gasgesetzen gehorchend an; die Strömung im ungestörten Teil kann nach den Grundlagen der Theorie nur parallel der Zylinderachse (z-Richtung) gehen und muß natürlich oben und unten an die Begrenzungen anschließen, d. h. sie muß am Zylinderdeckel die Geschwindigkeit null haben, am Kolben die Geschwindigkeit des Kolbens. Dazwischen steigt sie linear mit dem Abstand vom Zylinderdeckel (Formel 6) an. Die Annahmen konstanter Dichte und linearen Geschwindigkeitsanstiegs sind durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho U)}{\partial z} = 0$$

miteinander zwangläufig verknüpft, wie das Einsetzen der Formeln 6 und 7 lehrt.

Wir legen nun die z-Achse vom Zylinderdeckel in die Zylinderachse nach unten, so daß z den Abstand vom Deckel bedeutet, die y-Achse an der betrachteten Stelle senkrecht auf die Zylinderwand in den Zylinder hinein und schreiben nach den Ueberlegungen der Einleitung die Grundgleichung für die Erhaltung des Impulses ϱu in der Grenzschicht hin.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \varrho\, u\, d y + \frac{\partial}{\partial z}\int_0^\delta \varrho\, u^2\, d y - U \frac{\partial}{\partial z}\int_0^\delta \varrho\, u\, d y - U \frac{\partial \varrho\, \delta}{\partial t} = - \delta \frac{\partial p}{\partial z} - \varrho\, 0{,}028\, U^2 \left(\frac{\nu}{U \delta}\right)^{1/4} \quad (1).$$

Die Geschwindigkeit in der Grenzschicht u hängt dabei mit der Geschwindigkeit U im ungestörten Teil folgendermaßen zusammen [1])

$$u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left(\frac{8}{7} - \frac{1}{7}\frac{y}{\delta}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Der Druck p berechnet sich nach der Theorie aus der Bewegung im ungestörten Teil nach den gewöhnlichen Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen zu

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \varrho\, U \frac{\partial U}{\partial z} + \varrho \frac{\partial}{\partial t}(U) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Man erhält für die in (1) auftretenden Integrade durch Einsetzen von (2)

$$\int_0^\delta u\, d y = U \delta \left(1 - \frac{1}{15}\right) = \frac{14}{15} U \delta \qquad \int_0^\delta u^2\, d y = \frac{U^2 \delta}{7}\left(\frac{64}{9} - 1 + \frac{1}{23}\right) = U^2 \delta \left(\frac{55}{63} + \frac{1}{161}\right) \quad (4)$$

3 und 4 in 1 eingesetzt und ausdifferenziert ergibt nach Division durch $\varrho\, U^2 \delta$

$$-\frac{1}{15}\frac{1}{U\delta}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \left(\frac{1}{161} - \frac{19}{315}\right)\frac{1}{\delta}\frac{\partial \delta}{\partial z} - \left(\frac{59}{315} - \frac{2}{161}\right)\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{15}\frac{1}{\varrho\, U^2}\frac{\partial \varrho\, U}{\partial t} - \frac{0{,}028}{\delta}\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \quad (5).$$

Nun führen wir unsere Annahmen über die Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit im Zylinder ein. Am (eben gedachten) Zylinderdeckel, sowie am Kolben muß das Gas die Geschwindigkeit dieser festen Flächen haben, d. h. am Deckel die Geschwindigkeit 0, am Kolben die momentane Kolbengeschwindigkeit c. Dazwischen findet ein linearer Abfall statt, d. h. an der Stelle z herrscht im ungestörten Teil die Gasgeschwindigkeit

$$U = \frac{z}{l} c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Hierbei bedeutet l den Abstand des Kolbens vom Deckel, l_0, das wir gleich brauchen werden, den Abstand in der oberen Totlage, d. h. die Höhe des »Ersatz«-Kompressionsraumes.

Für die Gasdichte gilt bei bestimmtem Ladungsgewicht

$$\varrho = \varrho_0 \frac{l_0}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7),$$

da das Volum proportional l ist (ϱ_0 Dichte in Kolbenstellung l_0, obere Totlage).

Mit diesen Ansätzen haben wir

$$\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{z} \qquad \frac{\nu}{U\delta} = \frac{\nu_0\, \varrho_0}{\varrho\, U \delta} = \frac{\nu_0}{l_0}\frac{l^2}{c\,\delta\, z}.$$

Hier bedeutet $\nu_0 \dfrac{\eta}{\varrho_0}$, wobei η der Reibungskoeffizient bei der betreffenden Temperatur ist.

[1]) H. Latzko, l. c. S. 279, Gl. 25a

Endlich führen wir statt der Zeit t die zugehörige Kolbenstellung l als unabhängige Variable ein nach den Gleichungen

$$\frac{dl}{dt} = c, \qquad dl = c\,dt, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{\partial}{\partial l} \cdot c.$$

Dann wird

$$\frac{1}{\varrho U^2} \frac{\partial \varrho U}{\partial t} = \frac{1}{\varrho U^2} \varrho_0 l_0 z c \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{c}{l^2}\right) = \frac{l^3}{zc}\left(-\frac{2c}{l^3} + \frac{1}{l^2}\frac{\partial c}{\partial l}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{l}{c}\frac{\partial c}{\partial l} - 2\right).$$

Setzt man dies in (5) ein und schreibt $d \ln \delta$ statt $\frac{1}{\delta}\, d\,\delta$, so wird (5) nach Multiplikation mit $15\,z$

$$-l\frac{\partial \ln \delta}{\partial l} + z\frac{\partial \ln \delta}{\partial z}\left(\frac{15}{161} - \frac{19}{21}\right) - \left(\frac{59}{21} - \frac{30}{161}\right) = \left(\frac{l}{c}\frac{\partial c}{\partial l} - 2\right) - \frac{0{,}42}{\delta} z \left(\frac{\nu_0}{l_0}\frac{l^2}{c\delta z}\right)^{1/4} \quad (8).$$

Nun schreibt man $\quad l\frac{\partial}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial \ln l}, \qquad z\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \ln z},$

nimmt den Summanden 1 in erstem Klammerausdruck rechts nach links und schreibt den letzten Ausdruck rechts.

$$-0{,}42\left(\frac{\nu_0}{l_0}\right)^{1/4} \frac{l^{1/2}}{c^{1/4}} \delta^{-5/4} z^{3/4} = -0{,}42\left(\frac{\nu_0}{l_0}\right)^{1/4} \frac{l^{1/2}}{c^{1/4}} e^{-5/4 \ln \delta + 3/4 \ln z}.$$

Dann führt man statt δ eine neue Funktion φ ein

$$\varphi = \ln \delta + \left(\frac{6}{5} - \frac{31}{345}\right) \ln l + \ln c - \frac{3}{5} \ln z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Es wird nämlich

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \ln l} = -\frac{\partial \ln \delta}{\partial \ln l} + 2 - \left(\frac{59}{21} - \frac{30}{161}\right) - \left(\frac{19}{35} - \frac{9}{161}\right) - \frac{\partial \ln c}{\partial \ln l}$$

$$-\left(\frac{19}{21} - \frac{15}{161}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \ln z} = -\left(\frac{19}{21} - \frac{15}{161}\right)\frac{\partial \ln \delta}{\partial \ln z} + \frac{19}{35} - \frac{9}{161}.$$

Addiert man diese beiden Ausdrücke und vergleicht die Summe mit (8), so sieht man, daß sich (8) folgendermaßen schreiben läßt:

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial \ln l} + \left(\frac{19}{21} - \frac{15}{161}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \ln z} = 0{,}42\left(\frac{\nu_0}{l_0}\right)^{1/4} \frac{l^{1/2}}{c^{1/4}} e^{-5/4 \ln \delta + 3/4 \ln z}$$

$$= 0{,}42\left(\frac{\nu_0}{l_0}\right)^{1/4} e^{-\frac{5}{4}\varphi + \left(\frac{3}{2} - \frac{31}{276} + \frac{1}{2}\right)\ln l + \ln c} \quad (10).$$

Man formt etwas um und erhält

$$\frac{4}{5}\frac{\partial e^{5/4 \varphi}}{\partial \ln l} + \frac{4}{5}\left(\frac{19}{21} - \frac{15}{161}\right)\frac{\partial e^{5/4 \varphi}}{\partial \ln z} = 0{,}42\left(\frac{\nu_0}{l_0}\right)^{1/4} l^{2 - \frac{31}{276}} c \quad . \; . \; . \quad (11).$$

Das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung lautet

$$e^{5/4 \varphi} = f\left[-\frac{5}{4}\ln l + \frac{5}{4\left(\frac{19}{21} - \frac{15}{161}\right)} \ln z\right] + \frac{5}{4}\, 0{,}42 \int_A^l \left(\frac{\nu_0}{l_0}\right)^{1/4} c\, l^{1 - \frac{31}{276}}\, dl \quad . \; . \quad (12),$$

wo $f[x]$ eine noch beliebige Funktion des Argumentes x bedeutet, die aus den Grenzbedingungen zu bestimmen ist, und die Konstante A noch festgelegt werden muß. Die linke Seite der Gleichung lautet

$$e^{5/4 \varphi} = \delta^{\frac{5}{4}} l^{\frac{3}{2} - \frac{31}{276}} c^{\frac{5}{4}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Wir haben nun den Grenzbedingungen zu genügen. Es wird erstens verlangt, daß am Kolben ($z = l$) die Grenzschichtdicke δ verschwinde[1]), denn die Strömung muß am Kolben überall dessen Geschwindigkeit besitzen und darf nicht in der Grenzschicht

[1]) Diese Grenzschicht, innerhalb deren an der vom Gas bespülten Zylinderwand der Abfall der Strömungsgeschwindigkeit erfolgt, hat nichts zu tun mit einer event. vorhandenen Schicht von Gasrückständen über dem Kolben. Auf diese letztere Frage ist in der vorzitierten Arbeit von A. Herzfeld ausführlich eingegangen.

hinter ihm zurückbleiben. Bliebe sie außen dahinter zurück, so würden »Löcher« entstehen. Das gibt die Bedingung

$$0 = f\left[\left(-\frac{5}{4} + \frac{5}{4\left(\frac{19}{21} - \frac{15}{161}\right)}\right)\ln l\right] + \frac{5}{4}\cdot 0{,}42\int_A^l \ldots d\,l \quad \ldots \quad (14),$$

(wobei wir das Integral der Kürze halber nicht ausschreiben) für alle Werte von $l > l_0$. Damit dies möglich sei, muß $f[\ln x]$ die Bedeutung haben:

$$f[\ln x] = -\frac{5}{4}\cdot 0{,}42\int_A^{x'} \ldots d\,l,$$

wobei das x' der oberen Grenze gegeben ist durch

$$\ln x' = \frac{1}{-\frac{5}{4} + \frac{5}{4\left(\frac{19}{21} - \frac{15}{161}\right)}}\ln x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Wir erhalten also nach (12)

$$e^{5/4\,\varphi} = -\frac{5}{4}\cdot 0{,}42\int_A^{x''} \ldots\ldots d\,l + \frac{5}{4}\cdot 0{,}42\int_A^l \ldots\ldots d\,l = \frac{5}{4}\cdot 0{,}42\int_{x''}^l \ldots\ldots d\,l.$$

Hier hat dann, wie der Vergleich von (12) und (15) zeigt, x'' den Sinn

$$\ln x'' = \frac{1}{\frac{5}{4} - \frac{5}{4\left(\frac{19}{21} - \frac{15}{161}\right)}}\left[\frac{5}{4}\ln l - \frac{5}{4\left(\frac{19}{21} - \frac{15}{161}\right)}\ln z\right] = \ln z + \frac{56}{13}(\ln z - \ln l)$$

Wir erhalten

$$x'' = z^{5,3}\, l^{-4,3}$$

als untere Grenze unseres Integrals.

Wir bekommen also für die Grenzschicht

$$\delta^{5/4} = \frac{5}{4}\cdot 0{,}42\, z^{3/4}\, c^{-5/4}\, l^{-3/2 + 31/276}\int_{x''}^{l}\left(\frac{\nu_0}{l_0}\right)^{1/4} c\, l^{1 - 31/276}\, d\,l.$$

Nun ist es noch zweckmäßig, möglichst viele Faktoren unseres Ausdrucks dimensionslos zu machen, indem man alle Längen in Bruchteilen von $l_{\max}$, dem Kolbenabstand vom Zylinderdeckel in der unteren Totlage oder der Summe von Hub und Höhe des Kompressionsraums, alle Geschwindigkeiten in Bruchteilen der mittleren Kolbengeschwindigkeit c_m mißt. Dann wird die Schlußformel

$$\delta^{5/4} = \frac{l_{\max}}{c_m^{1/4}}\left(\frac{l_{\max}}{l_0}\right)^{1/4}\frac{5}{4}\cdot 0{,}42\left(\frac{z}{l_{\max}}\right)^{3/4}\left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^{-3/2 + 31/276}\left(\frac{c}{c_m}\right)^{-5/4}\int_{x''/l_{\max}}^{l/l_{\max}}\nu_0^{1/4}\,\frac{c}{c_m}\left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^{1 - 31/276}\frac{d\,l}{l_{\max}} \quad (16).$$

Für zwei Motoren mit gleicher Kompression $\left(\text{gleiches } \frac{l_{\max}}{l_0}\right)$, gleichem Schubstangenverhältnis (das bedeutet, daß zu einem bestimmten Wert von $\frac{l}{l_{\max}}$ bei beiden der gleiche Wert von $\frac{c}{c_m}$ gehört) und gleichen Gemischverhältnissen (ν_0) hängt daher der Absolutwert von δ nur mehr vom ersten Faktor ab, die Verteilung der Grenzschicht über den Zylinder ist die gleiche.

Unsere Formel gilt nicht mehr für $x'' < l_0$, d. h. $z < l_0^{13/69}\, l^{15/69} = z_0$, denn für Werte der Integrationsvariabeln kleiner als $\frac{l_0}{l_{\max}}$ gibt es keine zugehörige Kolbenstellung und daher auch keine zugehörige Kolbengeschwindigkeit c, der Integrand verliert seine Bedeutung. Aber auch die Grenzbedingung, aus der wir unsere bisherige Bestimmung von f erhalten haben, ist dort nicht mehr gültig. Im Kompressionsraum tritt an ihre

Stelle die Bedingung, daß in der oberen Totlage die Grenzschicht verschwindet, also für $l = l_0$ δ für alle Werte von z null ist. Dann folgt ähnlich wie oben der gleiche Ausdruck wie (16), nur hat die untere Grenze des Integrals den festen Wert $\frac{l_0}{l_{\max}}$. Also gilt für $z < z_0 = l_0^{13/69}\, l^{56/69}$.

$$\delta^{5/4} = \frac{l_{\max}}{c_m^{1/4}} \left(\frac{l_{\max}}{l_0}\right)^{1/4} \frac{5}{4} \cdot 0{,}42 \left(\frac{z}{l_{\max}}\right)^{3/4} \left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^{-3/2 + 31/276} \left(\frac{c}{c_m}\right)^{-5/4} \int\limits_{l_0/l_{\max}}^{l/l_{\max}} \nu_0^{1/4} \frac{c}{c_m} \left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^{1 - 31/276} \frac{d\,l}{l_{\max}} \quad (16\,a).$$

An den Enden des Hubes, wo die Kolbengeschwindigkeit c klein wird, ist die graphische Auswertung der Integrale unsicher, wir werden daher dort Näherungsformeln entwickeln.

Wir bezeichnen, wie in der Technik üblich, den Hub $l_{\max} - l_0$ mit s, die Pleuelstangenlänge mit $\mathfrak{L}$, $\frac{s}{2\mathfrak{L}}$ mit λ.

Eine leichte Rechnung zeigt, daß in der Nähe der oberen Totlage

$$\frac{c}{c_m} = \pi \sqrt{1 + \lambda} \sqrt{\frac{l - l_0}{s}}$$

ist. Das Integral lautet dann angenähert für Werte von z und l nahe an l_0

$$\left(\frac{c}{c_m}\right)^{-5/4} \int\limits_{x''/l_{\max}}^{l/l_{\max}} = \nu_0^{1/4} \left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^{1 - 31/276} \frac{1}{\pi^{1/4}\,(1+\lambda)^{1/8}} \frac{2}{3} \left[\left(\frac{l - l_0}{l_{\max}}\right)^{3/2} - \left(\frac{x'' - l_0}{l_{\max}}\right)^{3/2}\right] \frac{(l_{\max} - l_0)^{1/8}\, l_{\max}^{1/2}}{(l - l_0)^{5/8}}.$$

Für die Nähe der unteren Totlage gilt entsprechend

$$\frac{c}{c_m} = \pi \sqrt{1 - \lambda} \sqrt{\frac{l_{\max} - l}{s}}$$

und

$$\left(\frac{c}{c_m}\right)^{-5/4} \int\limits_{x''/l_{\max}}^{l/l_{\max}} = \nu_0^{1/4} \frac{1}{\pi^{1/4}(1+\lambda)^{1/8}} \frac{2}{3} \left[\left(\frac{l_{\max} - x''}{l_{\max}}\right)^{3/2} - \left(\frac{l_{\max} - l}{l_{\max}}\right)^{3/2}\right] \frac{(l_{\max} - l_0)^{1/8}\, l_{\max}^{1/2}}{(l_{\max} - l)^{5/8}}.$$

3. Der Wärmeübergang. Es sei in einer turbulent strömenden Gasmasse C_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen für 1 g Substanz, T die Temperatur, so ist die pro cm² Wand in der Sekunde übergehende Wärmemenge [1]),

$$q_0 = \frac{\frac{7 C_v}{8}}{\frac{U}{7\,\delta^{1/7}}} \lim_{y=0} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\, y^{6/7}\right) \times \text{der Schubspannung der Reibung} \quad . \; . \quad (17).$$

Die letztere Größe ist nach Formel (1)

$$\varrho \cdot 0{,}028\, U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18).$$

Für die Temperatur in der Grenzschicht nehmen wir einen ähnlichen Abfall an wie für die Geschwindigkeit, nämlich [2])

$$T = T_w + \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left(\frac{8}{7} - \frac{1}{7}\frac{y}{\delta}\right) (T_i - T_w),$$

wo T_w die Wandtemperatur T_i die Innentemperatur bedeutet.

Wir machen bei unserer Rechnung folgende Vernachlässigungen:

1. Setzen wir das Temperaturfeld in der Grenzschicht gleich dem Geschwindigkeitsfeld.

---

[1]) H. Latzko, l. c. S. 273, Gl. 9. Der Nenner $\frac{8\,U}{7\,\delta^{1/7}}$ in unserer Gleichung rührt daher, daß unsere Reihe (2) für die Geschwindigkeit der Grenzschicht mit $\frac{8\,U}{7\,\delta^{1/7}}$ beginnt.

[2]) l. c. S. 281, Gl. 32 b unter Vernachlässigung des quadratischen Gliedes.

2. Nehmen wir an, daß in der ungestörten Strömung der Länge nach im ganzen Zylinder die Durchwirbelung so gut ist, daß in einem gegebenen Moment auf der ganzen Länge dieselbe Temperatur herrscht.

3. Sehen wir von den Dichtedifferenzen ab, die durch den ungleichen Druck hervorgerufen werden.

4. Sehen wir endlich von den Druck- und Dichtedifferenzen ab, die dadurch entstehen, daß die Grenzschicht infolge der Wärmeleitung kälter ist als das Innere. Alle diese Vernachlässigungen macht auch Latzko (bis auf die erste).

Nun erhalten wir durch Einsetzen

$$q_0 = 0{,}028\, \varrho\, C_v \frac{\dfrac{U^2}{U}}{\delta^{1/7}} \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \frac{T_i - T_w}{\delta^{1/7}} = 0{,}028\, \varrho\, C_v\, U^{3/4} \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{1/4} (T_i - T_w)$$

$$= 0{,}028\, C_v\, \varrho_0\, \nu_0^{1/4}\, c_m^{3/4} \left(\frac{l_0}{l}\,\frac{c}{c_m}\,\frac{z}{l}\right)^{3/4} \delta^{-1/4} (T_i - T_w).$$

Diese Gleichung können wir auch schreiben

$$q_0 = C_v\, \nu_0^{1/4} (T_i - T_w) \frac{c_m^{4/5}}{l_{\max}^{1/5}}\, \varrho_0 \left(\frac{l_0}{l_{\max}}\right)^{4/5} \frac{0{,}028}{\sqrt[5]{\frac{5}{4} \cdot 0{,}42}}\, \frac{c}{c_m} \left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^{-6/5 - 31/1380} K^{-1/5},$$

wobei K je nachdem, ob wir im Teil $x'' < l_0$ oder $> l_0$ sind, das in (16a) oder in (16) auftretende Integral bedeutet. Wenn wir von dem schwachen Temperatureinfluß absehen, der von der Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung infolge des im Integral stehenden $(\nu_0)^{1/4}$ herrührt, so können wir im wesentlichen 4 Faktoren unterscheiden, die wir von rechts her diskutieren wollen.

Der Faktor

$$\varrho_0^{-1/20} \left(\frac{l_0}{l_{\max}}\right)^{4/5} \frac{0{,}028}{\sqrt[5]{\frac{5}{4} \cdot 0{,}42}} \left(\frac{z}{l_{\max}}\right)^{3/5} \frac{c}{c_m} \left(\frac{l}{l_{\max}}\right)^{-6/5 - 31/1380} K^{-1/5}$$

hängt nur von den geometrischen Verhältnissen des Motors ab und bleibt bei Veränderung der absoluten Größe unverändert (die Bohrung ist überhaupt gleichgültig).

Der Faktor

$$\varrho_0 \cdot \varrho_0^{1/20} = \varrho_0^{21/20}$$

hängt nur von der Anfangsladung ab.

Der Faktor

$$\frac{c_m^{4/5}}{l_{\max}^{1/5}}$$

hängt von der Absolutgröße des Zylinders sowie der Tourenzahl ab.

Der Faktor

$$C_v\, \nu_0^{1/4} (T_i - T_w),$$

der als »Temperaturfaktor« H bezeichnet werden kann, ist der einzige, der von den Temperaturverhältnissen (und außerdem vom Gemisch) abhängt. Das Produkt der drei ersten Faktoren, mit dem Umfang des Zylinders $2\, r\pi$ multipliziert, wollen wir mit dem Buchstaben S bezeichnen.

Dieses S muß nun über die ganze freigelegte Zylinderhöhe graphisch integriert werden.

Für den Raum $z < z_0$ läßt sich dagegen der ganze Wärmeübergang direkt ausrechnen.

Es bezeichne S_0 diejenige Größe, die S im gegebenen Moment an der Stelle $z = z_0$ hat, d. h. $S_0 H$ die Wärmemenge, die an dieser Stelle z in einem Streifen von 1 cm Höhe in der Zeiteinheit bei der gegebenen Kolbenstellung übergeht. Da im Raum $z < z_0$ das Integral K von z nicht abhängt, tritt z im Ausdruck für S nur in der Form $z^{3/5}$ auf. Es gilt also

$$S = S_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^{3/5}$$

und im ganzen Kompressionsraum geht in der Zeiteinheit die Wärmemenge über

$$q_x = H S_0 \int_0^{z_0} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{3/5} dz = \frac{5}{8} H S_0 z_0.$$

Ist der Kolben nahe dem Kompressionsraum, so gilt an der Stelle z im Vergleich mit der Stelle $z = z_0$ bei der gleichen Kolbenstellung l

$$\frac{S}{S_{0,\,l}} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{3/4} \frac{\delta_0^{1/4}}{\delta^{1/4}} \qquad \frac{\delta^{5/4}}{\delta_0^{5/4}} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{3/4} \left[1 - \left(\frac{x'' - l_0}{l - l_0}\right)^{3/2}\right].$$

In dem ganzen Teil zwischen dem Ende des Kompressionsraums und der momentanen Kolbenstellung geht dann pro Zeiteinheit über

$$\int_{z_0}^{l} S\,dz = S_0 \int_{z_0}^{l} \left[1 - \left(\frac{x'' - l_0}{l - l_0}\right)^{3/2}\right]^{-1/5} dz = S_0\,(l - l_0)\,\frac{1}{5{,}3} \int_0^1 (1 - y^{3/2})^{-1/5}\,dy \sim 0{,}23\,S_0\,(l - l_0).$$

Hier ist y eine Abkürzung für den reziproken Integranden, das Integral konnte nur angenähert ausgewertet werden.

Endlich haben wir noch den Wärmeübergang nahe am Kolben, wo die Grenzschicht dünn wird, bei beliebiger Kolbenstellung zu berechnen. Wir wollen eine Annäherungsformel für das kurze Stück zwischen $z = z_1$ und $z = l$ (Kolben) geben. Es habe die Grenzschicht an der Stelle z_1 die Dicke δ_1, an der gleichen Stelle sei der Wärmeübergang pro Zeit- und Längeneinheit $S'H$, so gilt

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{3/4} \left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{1/4} \qquad \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{5/4} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{3/4} \frac{l - x''}{l - x_1''}, \text{ also}$$

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{3/5} \left(\frac{l'' - x_1''}{l - x''}\right)^{1/5}, \quad \int_{z_1}^{l} S\,dz = \frac{5}{4}\,S'\,\frac{l - x_1''}{5{,}3}\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{l - x_1''}{l}\right).$$

Zusammenfassung. Es wird die Prandtl-Kármánsche Theorie der Grenzschicht und des Wärmeüberganges, die bisher nur für stationäre Strömungen entwickelt war, auf die nichtstationäre Strömung während des Expansionshubes einer Kolbenmaschine angewandt und das zugehörige Formelsystem entwickelt und integriert. Die Prüfung dieser Formeln im Falle des Verpuffungsmotors, ihre ausführliche zahlenmäßige Diskussion, der Vergleich mit den Untersuchungen von Nusselt und praktische Folgerungen finden sich in einer demnächst erscheinenden Arbeit von A. Herzfeld.

München, November 1923. 384

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Über neuere Fortschritte der darstellenden Geometrie.

Von **ERWIN KRUPPA** in Wien.

Fast allgemein herrscht heute die Ansicht, daß die darstellende Geometrie seit geraumer Zeit keine nennenswerten Fortschritte gemacht habe, daß die Entwicklung, die ihr G. Monge (Auf- und Grundrißverfahren) und J. H. Lambert (Perspektive) gewiesen haben, mit der insbesondere durch W. Fiedler durchgeführten organischen Verbindung mit der projektiven Geometrie zu einem Abschluß gelangt sei. Das Wort, daß Stillstand Rückgang bedeutet, gilt ganz besonders für eine Wissenschaft. Wenn die Fortentwicklung eines Wissensgebietes erlahmt, schwindet das Interesse dafür und lebendig bleiben bloß jene Teile, die in andern Gebieten Anwendung gefunden haben. Obwohl recht oft die Forderung erhoben wird, die darstellende Geometrie im mathematischen Unterricht mehr zu pflegen, findet man bei vielen Mathematikern Abneigung und Geringschätzung gegen diesen Zweig der Mathematik. Unsere Zeit, die unter der Vorherrschaft der Analysis anschaulich-geometrischem Denken abhold ist, ist naturgemäß auch für die darstellende Geometrie ungünstig. Doch kann man mit Sicherheit annehmen, daß eine Zeit herannaht, in der die Freude an anschaulich-geometrischen Gebilden wieder aufleben wird, und in der jeder Mathematiker in jenem allgemeinsten Sinne darstellender Geometer sein wird, in dem es etwa Riemann war, als er die nach ihm benannten Flächen in die Funktionentheorie einführte. In einer solchen der anschaulichen Deutung mathematischer Begriffsbildungen günstigen Atmosphäre wird auch notwendigerweise die darstellende Geometrie aus ihren bisherigen Grenzen herauswachsen und in die verschiedensten Teile der Mathematik ihre Ausläufer entsenden: Die in diesem Aufsatz besprochenen neueren Fortschritte der darstellenden Geometrie lassen die Möglichkeit einer solchen Entwicklung erhoffen.

Der vorliegende Bericht ist der Aufgabe gewidmet, durch Zusammenfassung verwandter Einzelarbeiten einige neuere Fortschritte auf dem Gebiet der darstellenden Geometrie aufzuzeigen. Er will keineswegs ein vollständiger enzyklopädischer Literaturbericht sein, sondern bezweckt gewisse allgemeinere Gedanken vorzuführen, die sich für die Weiterentwicklung unseres Faches fruchtbringend erwiesen haben oder einen solchen Erfolg versprechen. Ich beschränke mich darauf, die neueren Leistungen der »Wiener Schule« hervorzuheben, wobei ich mir aber auf Grund des an Literaturangaben so reichen Werkes von G. Loria, Storia della Geometria Descrittiva, Milano 1921, bewußt bin, daß auch in andern Ländern (insbes. in Italien) in derselben Richtung Ersprießliches geschaffen wurde, das sich sehen lassen kann. Ich hoffe, daß diese Arbeit ausländische Fachgenossen anregen möge, ähnliche Berichte für ihre Länder zu verfassen. Die daraus zu gewinnende Uebersicht über die vorhandenen Ansätze könnte vielleicht die Grundlage zu einer neuen Entwicklung der darstellenden Geometrie werden. Nach dem Gesagten gilt mein Aufsatz hauptsächlich den Arbeiten meines verehrten Lehrers Emil Müller und seiner Schüler.

Seit jeher sind die Technischen Hochschulen die Pflanzstätten der darstellenden Geometrie. Hier wird sie einerseits als Hilfswissenschaft der Technik gelehrt, anderseits aber auch als selbständige Wissenschaft durch Lehre und Forschung gepflegt. Oesterreich war immer ein günstiger Boden für die darstellende Geometrie. Der Umstand, daß in den österreichischen Realschulen die darstellende Geometrie als vierjähriger Pflichtgegenstand eingeführt ist, bewirkt, daß die Mehrheit der Hörerschaft unserer Technischen Hochschulen in diesem Fach gut vorgebildet ist und schafft auch die Notwendigkeit, für die Heranbildung gründlich geschulter Lehrkräfte zu sorgen. Da die Wiener Technische Hochschule zwei Lehrkanzeln für darstellende Geometrie besitzt, ist eine Arbeitsteilung in der Ausbildung der Lehramtskandidaten ermöglicht, durch die diese bei Th. Schmid eine gründliche theoretische und konstruktive Ausbildung in der projektiven Geometrie erhalten, während sie bei E. Müller seminaristische Uebungen und einen Zyklus von Sondervorlesungen (1. Stereographische Projektion und Zyklographie, 2. Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie, 3. Konstruktive Behandlung der Regelflächen, 4. Konstruktive Behandlung der Schraub- und Schiebflächen) besuchen, die weit über dem stehen, was in den einführenden, für die Techniker bestimmten Vorlesungen gebracht werden kann. Beide Fachvertreter haben ihre einführenden Vorlesungen im Drucke veröffentlicht; von den oben genannten Sondervorlesungen von E. Müller liegt heute bloß die zweite in einer von mir herrührenden Bearbeitung in Buchform vor. Im folgenden habe ich daher diese drei Werke und zahlreiche Abhandlungen zu besprechen, die dem Lehrbetrieb in der darstellenden Geometrie an unserer Hochschule zugrunde liegen oder durch ihn angeregt worden sind.

Bezüglich der beiden Werke[1]) von E. Müller und Th. Schmid, die aus den einführenden Vorlesungen für Techniker entstanden sind und diese mit beträchtlichen Erweiterungen wiedergeben, beschränke ich mich auf einige allgemeine Bemerkungen. Trotzdem diese beiden Lehrbücher naturgemäß den in unzählig vielen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie behandelten Lehrstoff wiedergeben, wohnt ihnen doch ein besonderer Grad von Originalität inne. Beiden gemeinsam ist die besonders starke Einstellung nach der Richtung der technischen Anwendungen, eine Richtung, die an der Wiener Hochschule viel mehr gepflegt wird als an den meisten andern Hochschulen. Die von beiden Autoren veröffentlichten Uebungsbeispiele[2]) geben einen Einblick in diese Unterrichtsweise. Die Besucher der Naturforscherversammlung in Salzburg im September 1909 hatten Gelegenheit, in einer von E. Müller veranstalteten Ausstellung von Schülerzeichnungen diese »angewandte darstellende Geometrie« kennen zu lernen. Ein beiden Büchern gemeinsames Merkmal ist auch das Fehlen der projektiven Geometrie. E. Müller gibt in der Einleitung S. IV seines Werkes dafür eine psychologische Begründung, die allen für Techniker berechneten Vorlesungen in der darstellenden Geometrie zugrunde liegen sollte; sie lautet: »Das abstrakte geometrische Vorstellen z. B., wie es etwa aus der Beschäftigung mit der synthetischen projektiven Geo-

[1]) E. Müller, Lehrbuch d. darst. Geometrie f. technische Hochschulen, Leipzig u. Berlin, 3. Aufl. 1. Bd. 1920, 2. Bd. 1923. — Th. Schmid, Darstellende Geometrie, Leipzig u. Berlin (Sammlung Schubert Bde. 65 u. 66) 1. Bd. 3. Aufl. 1922, 2. Bd. 2. Aufl. 1923.

[2]) E. Müller, Techn. Uebungsaufgaben f. darstellende Geometrie, Leipzig u. Wien 1911—1921 (Verlag F. Deudicke) 5 Hefte zu je 10 Blättern. — Th. Schmid, Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie, Leipzig (Verlag Göschen).

metrie entspringt, scheint mir von ganz andrer Art als das Vorstellen, wie es der Techniker in erster Linie braucht. Ihm handelt es sich gewöhnlich nicht um Linien oder Flächen, die bloß soweit definiert sind, daß sie noch mannigfaltige Gestalten annehmen können, sondern vor allem um Gegenstände von genau bestimmten Formen.«[1]) Von der Wahrheit dieses Satzes überzeugt man sich leicht, wenn man daran geht, die Methoden der darstellenden Geometrie auf ein technisches Objekt anzuwenden. Die Unabänderlichkeit der Annahme, in denen oft das Verfahren für den beliebten theoretischen »allgemeinen Fall« versagt, erzeugt mannigfache Schwierigkeiten, die mehr gewürdigt zu werden verdienen. Aus dem angeführten Satz folgt, daß in einem der technischen Raumanschauung gewidmeten Buch die projektive Geometrie keinen Raum finden kann, wird doch von ihrem Standpunkte aus jede Figur grundsätzlich als äquivalent mit allen zu ihr linear verwandten angesehen.

Beide Werke enthalten reichlich alles, was die darstellende Geometrie dem Techniker an Handwerkszeug und an Schulung im technischen Raumanschauen zu geben hat. Während das Werk von E. **Müller** die Anwendungen aus dem Baufach bevorzugt, bringt das von Th. Schmid hauptsächlich maschinenbauliche Beispiele in reicher Auswahl. Beide Werke zusammengenommen liefern aber auch eine vollständige Darlegung des Gebietes der darstellenden Geometrie in jenen engeren Grenzen, die ihr in landläufiger Auffassung zugewiesen werden. Nach meinem Empfinden wird diese Vollständigkeit nicht zum Geringsten durch den Umstand hervorgerufen, daß die beiden Werke in entgegengesetzten Richtungen geschrieben sind. Während das Buch von E. Müller nach Allgemeinheit und Verallgemeinerungsfähigkeit der Begriffe und Methoden strebt und auch viele Ansätze zu jenen neueren Fortschritten enthält, die ich in diesem Aufsatz besprechen will, zeichnet sich das Buch von Th. Schmid durch eine weit größe Fülle von Einzelaufgaben aus, die mit nicht zu übertreffender Gründlichkeit bis zum letzten Ende verfolgt werden, wobei auch die schon von G. Loria angestrebte Verknüpfung der darstellenden Geometrie mit der analytischen Geometrie zu Ehren gebracht wird. Die 2. Auflage des 2. Bandes des Schmidschen Werkes enthält auch einen kurzen Abriß der Nomographie[2]), dieses neuen Zweiges der darstellenden Geometrie, der wohl noch einer organischen Einordnung in ihr Gebäude bedarf, was in der Darstellung von Th. Schmid angestrebt wird. Trotz mancher Fortschritte und origineller Wendungen ist der Inhalt dieser beiden Werke der bekannte und gesicherte Besitzstand der darstellenden Geometrie. Die im folgenden besprochenen Arbeiten überschreiten diese Grenzen.

1. Methodenlehre zu den linearen Abbildungen. Bald nachdem G. Monge die Grundlagen zur abstrakt-geometrischen Behandlung der darstellenden Geometrie geschaffen hatte, gab sie weitsichtigen Geometern die Anregung, ihre Verfahren von allgemeineren und höheren Gesichtspunkten zu betrachten. So entstand die projektive Geometrie, die dann wieder ihrerseits mächtig auf die darstellende Geometrie zurückgewirkt hat. Gebilde, die projektive Erzeugungsweisen auf Grund der Operationen des Projizierens und Schneidens zulassen, sind naturgemäß für eine darstellend-geometrische Behandlung besonders geeignet; auch innerhalb der Abbildungsmethoden konnten die Verfahren der projektiven Geometrie erfolgreich angewendet werden. Dieser Durchdringungsprozeß mit der projektiven Geometrie ließ aber bisher die Unabhängigkeit der gebräuchlichen Abbildungen, Auf- und Grundrißverfahren, Perspektive, Achsonometrie usw. ziemlich unberührt. Dagegen betrachtet das kürzlich erschienene Buch von E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie, 1. Bd., Die linearen Abbildungen, bearbeitet von E. Kruppa, Leipzig und Wien 1923, diese Abbildungen als Sonderfälle allgemeinerer Abbildungen, die sich durch weitgehende projektive Verallgemeinerung ergeben. Die folgenden Darlegungen dieses und zum Teil des nächsten Abschnittes (**2**) gelten diesem

[1]) Dem Unterricht in der darstellenden Geometrie sind folgende Arbeiten gewidmet: E. Müller, Der Unterricht in der darstellenden Geometrie an den technischen Hochschulen Oesterreichs, Wien 1911, Bericht der internat. math. Unterrichtskommission (JMUK); Anregungen zur Ausgestaltung des darstellend-geometrischen Unterrichts an technischen Hochschulen und Universitäten, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), S. 19 bis 24; Geschichte der darstellenden Geometrie, ihre Lehre und Bedeutung an den Technischen Hochschulen Oesterreichs. (Zeitschr. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 1919, Heft 10, 13, 17.)

[2]) Th. Schmid führt hier (Fig. 162) zur Transformation von Netztafeln mit drei Geradenscharen in Fluchttafeln das Polarsystem einer Parabel ein, so wie später H. Schwerdt in dieser Zeitschrift 4, 1924, S. 320.

Werke, das wir in Hinkunft kurz mit L. A. bezeichnen. Den gebräuchlichen linearen Abbildungen liegen drei Grundprinzipien zugrunde, das Zweispuren-, das Zweibilder- und das achsonometrische Prinzip. Die geläufigste Anwendung des Zweispurenprinzips ist die zentralprojektive Abbildung einer Geraden G durch ihren Spurpunkt g und ihren Fluchtpunkt g_u^c. Daraus läßt sich das Zweispurenprinzip folgendermaßen herleiten. Das Bildpaar $(g g_u^c)$ kommt dadurch zustande, daß man G mit der Bildebene Π und mit der uneigentlichen (unendlichfernen) Ebene Ω in g und g_u schneidet und diese beiden Punkte aus einem festen Zentrum o auf Π projiziert. Um irgendwelche andre Raumgebilde darzustellen, muß man diese als Linienmannigfaltigkeiten auffassen — d. h. den Punkt als Strahlbündel, die Ebene als Strahlfeld, eine Kurve als Monosekantenkomplex oder als Bisekantenkongruenz, eine Fläche als Tangentenkomplex — und die Geraden dieser Mannigfaltigkeiten auf die orientierten Punktepaare $(g g_u^c)$ abbilden. Stellt man insbesondere alle durch einen Punkt p gehenden Strahlen durch die Paare $g g_u^c$ dar, so erhält man eine zentrische Aehnlichkeit $(g \rightarrow g_u^c)$ mit dem Zentralriß p^c von p als Zentrum und dem Aehnlichkeitsverhältnis $\overline{p^c g : p^c g_u^c} = \mathfrak{p} : \mathfrak{d}$, wo $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{d}$ die Bilddistanzen von p und o bedeuten. Die Bildpaare der Strahlen einer Ebene ε sind i. a. an zwei parallele Geraden gebunden, von denen die eine E, die Bildspur, die Spurpunkte, die andre E_u^c, die Fluchtspur oder kürzer Flucht, die Fluchtpunkte enthält. Mit den Fortschritten, zu denen diese liniengeometrische Auffassung der Raumgebilde geführt hat, werden wir uns später beschäftigen. Hier stellen wir bloß die zum Teil von W. Fiedler herrührende Verallgemeinerung dieses Abbildungsverfahrens fest, die das Zweispurenprinzip enthält.

Erklärung des Zweispurenprinzips: Man betrachte jedes Raumgebilde als Linienmannigfaltigkeit und stelle jede seiner Geraden G durch den Zentralriß $(g_1^c\, g_2^c)$ der Spurpunkte g_1 und g_2 dar, in denen sie zwei bestimmt gewählte, voneinander verschiedene Spurebenen σ_1 und σ_2 schneidet; dabei wird eine feste Bildebene Π und ein festes Auge o benutzt, das in keiner der Ebenen σ_1, σ_2 und Π liegt.

Man kann noch einen Schritt weitergehen, indem man an Stelle des zentralprojektiven Bildfeldes in Π eine kollineare Umformung desselben einführt. Allgemein soll eine kollineare Umformung eines Zentralrisses ein lineares Bild heißen, eine Begriffsbildung, der wir auch später begegnen werden.

Das Auf- und Grundrißverfahren läßt sich folgendermaßen erklären. Man projiziert die Raumpunkte p orthogonal auf zwei zueinander normale Ebenen Π_1 und Π_2 nach p_1' bezw. p'' und hierauf die Punktepaare $(p_1' p'')$ mittels einer Parallelprojektion, deren Sehstrahlen die Rißachse $X = [X_1\, X_2]$ normal kreuzen und gegen Π_1 und Π_2 gleichgeneigt sind, auf die mit Π_2 vereinigt gedachte Zeichenebene Π, wobei der Aufriß p'' ungeändert bleibt, während p_1' in den Grundriß p' übergeht. Die projektive Verallgemeinerung dieses Vorganges führt unmittelbar zur

Erklärung des Zweibilderprinzips: Das als Punktmannigfaltigkeit aufgefaßte Objekt wird dadurch abgebildet, daß man seine Punkte aus einem Auge o_1 auf eine Bildebene Π_1 und aus einem Auge o_2 auf eine Bildebene Π_2 projiziert, hierauf die beiden in Π_1 und Π_2 erhaltenen Bildfelder aus einem Auge o auf die Zeichenebene Π projiziert.

Werden die beiden Bildfelder in Π_1 und Π_2 noch kollinear umgeformt, so erhält man das allgemeinste Zweibilderprinzip.

Die projektive Verallgemeinerung der bekannten schiefen Achsonometrie führt zur folgenden

Erklärung des achsonometrischen Prinzips: Es besteht in der Ermittlung von linearen Bildern und Spurbildern der Raumgebilde auf Grund der Koordinaten ihrer Elemente bezüglich eines durch eine lineare Abbildung gegebene linearen projektiven Koordinatensystems.

Bevorzugt man bei einer achsonometrischen Abbildung das achsonometrische Bild und einen achsonometrischen Nebenriß, z. B. den Grundriß, so liegt wieder ein Zweibildersystem vor. Man erkennt dann leicht, daß sich alle technisch wichtigen Abbildungsmethoden (Auf- und Grundrißverfahren, Schräg- und Schräggrundrißverfahren, schiefe und normale Achsometrie, Zentral- und Zentralgrundrißverfahren und die stereoskopische Abbildung) dem oben erklärten Zweibilderprinzip unterordnen. Aber auch die Darstellung eines Reliefs, eines Objektes Σ, durch seinen Aufriß auf die Kollineationsebene und eine zu dieser normalen Grundrißebene läßt sich auf Grund der Sätze von J. de la Gournerie und R. Standigl als eine nach dem Zweibilderprinzip hergestellte Abbildung von Σ auffassen.

Die genannten Abbildungsprinzipien lassen sich aber nicht bloß in Sonderfällen, sondern auch in voller Allgemeinheit zur Durchführung bringen. Zu ihrer Festlegung und konstruktiven Behandlung muß die projektive Auffassung der euklidischen Maßbegriffe herangezogen werden, also der Satz, daß sich Orthogonalismus und Parallelismus im Raum als projektive Beziehungen zum absoluten Kegelschnitt J und zur uneigentlichen (= unendlichfernen) Ebene Ω auffassen lassen. Soll eine Maßaufgabe der Raumgeometrie in der Abbildung als projektive Aufgabe in bezug auf den absoluten Kegelschnitt J gelöst werden, so muß zunächst J durch eine Abbildung gegeben sein. Der einfachste Fall ist der, daß J aus einem eigentlichen Zentrum o auf die Zeichenebene projiziert wird. Sein Zentralriß ist der nullteilige Kreis $J^c = (h, \mathfrak{d} i)$, dessen Mitte h der Normalriß von o und dessen Halbmesser die imaginäre Länge $\mathfrak{d} i$ hat, wo $\mathfrak{d}$ die Bilddistanz von o bezeichnet. Steht nun eine Gerade $\mathfrak{G}$ auf einer Ebene α normal, so sind deren für das Auge o gebildeten Fluchtelemente g^c_u und A^c_u Pol und Polare bezüglich J^c; schließen zwei Gerade A und B den Winkel α ein, so ist (Laguerresche Formel) $\alpha = 1/2\, i \ln (a^c_u\, b^c_u\, J^c)$, wenn $(a^c_u\, b^c_u\, J^c)$ das von den Fluchtpunkten a^c_u, b^c_u und den Schnittpunkten der Verbindungsgeraden $[a^c_u\, b^c_u]$ mit J^c bestimmte Doppelverhältnis bedeutet usw. Will man auf diese Bemerkungen zeichnerisch ausführbare Konstruktionen gründen, so muß man vor allem das Polarsystem von J^c einer zeichnerischen Behandlung zugänglich machen. Dazu zieht man die bekannte Tatsache heran, daß das Polarsystem eines nullteiligen Kreises das Antipolarsystem bezüglich eines reellen Kreises ist, den wir seinen reellen Vertreter nennen. Allgemeiner gilt, daß das Polarsystem eines nullteiligen Kegelschnittes K^i das Antipolarsystem einer reellen Ellipse K, dem reellen Vertreter von K^i, ist. Das Polarsystem von K^i wird nun zeichnerisch dadurch erhalten, daß man das Polarsystem von K mit der Spiegelung an seinem Mittelpunkt zusammensetzt.

In unserem obigen Fall ist der reelle Vertreter von $J^c = (h, \mathfrak{d} i)$ der Kreis $D = (h, \mathfrak{d})$, also der Distanzkreis. Es zeigt sich nun, daß die in der bekannten elementaren Weise auf den Distanzkreis gegründeten Konstruktionen dieselben Linien benutzen wie diejenigen, die sich aus der obigen projektiven Auffassung der euklidischen Metrik ergeben. Für den Fall der unmittelbaren Zentralprojektion auf die Zeichenebene ergibt sich durch diese Auffassung zwar bloß eine neue Deutung alter Konstruktionen. Ihre Bedeutung springt erst in die Augen, wenn man sie auf verwickeltere Abbildungen anwendet, und man versteht dann leicht daß der absolute Kegelschnitt in der Literatur zur theoretischen Photogrammetrie schon längere Zeit eine Rolle spielt[1]).

Als Beispiel für das soeben Gesagte wähle ich die schräge Achsonometrie. Diese Abbildung wird durch ein willkürlich gewähltes Pohlkesches Dreibein $u^s (a^s b^s c^s)$ der Zeichenebene festgelegt, das man nach dem bekannten Satz von K. Pohlke als Schrägriß einer Würfelecke $u (a\, b\, c)$ auffassen kann. Durch $u^s (a^s b^s c^s)$ ist aber zugleich eine lineare Abbildung des absoluten Kegelschnittes J gegeben. Denkt man sich J aus u auf die Ebene $[a\, b\, c]$ projiziert, so erhält man einen nullteiligen Kreis K, für den $(a\, b\, c)$ ein gleichseitiges Poldreieck ist. Sein Schrägriß K^s hat somit $(a^s b^s c^s)$ als Poldreieck und dessen Schwerpunkt als Mittelpunkt. K^s steht demnach mit $(a^s b^s c^s)$ in einer gegenüber Affinitäten kovarianten Beziehung. Ich nenne das Polarsystem dieses von E. Müller in seinen Sondervorlesungen seit 1903/4 zur Lösung achsonometrischer Aufgaben eingeführten

[1]) Neuere Aufsätze dazu: E. Kruppa, Ueber einige Orientierungsprobleme der Photogrammetrie, Stzgsb. Ak. (math. nat.), Wien 1912, 121. Abt. IIa, S. 3 bis 16; Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven mit innerer Orientierung, ebenda 1913, 122, Abt. IIa, S. 1939 bis 1948. — Th. Schmid, Besprechung zweier Abhandlungen über Orientierungsprobleme der Photogrammetrie, Intern. Arch. f. Photogrammetrie 1913, 3, Heft 4, S. 305 bis 309.

Kegelschnittes die affinkovariante Polarität des Pohlkeschen Dreibeins. Faßt man u als Nebenauge und $[a\,b\,c]$ als Nebenbildebene auf, so spielt K^s im Grunde dieselbe Rolle wie das Zentralbild J^c (s. o.) des absoluten Kegelschnittes bei der Zentralprojektion; der reelle Vertreter von K^s entspricht dem reellen Vertreter von J^c, dem Distanzkreis D.

Angeregt durch diese Art der Behandlung der Achsonometrie ist es mir noch während meiner Studienzeit gelungen, auf die affinkovariante Polarität des Pohlkeschen Dreibeins einen Beweis des Pohlkeschen Satzes zu gründen, der zugleich eine Konstruktion der Sehstrahlrichtung und des räumlichen Dreibeins $u\,(a\,b\,c)$ liefert[1]. Von den Lehrsätzen der darstellenden Geometrie hat wohl kaum einer einen ebensolchen Reiz auf die Geometer ausgeübt wie der Pohlkesche Satz. G. Loria nennt ihn einen der interessantesten Sätze der allgemeinen Geometrie und etwa den schönsten aus der darstellenden Geometrie. Ich glaube aber, diese Sonderstellung des Pohlkeschen Satzes erschüttert zu haben, einerseits durch die Auffindung gleichartiger Sätze[2], anderseits durch den Nachweis[3], daß zu jedem der drei genannten Abbildungsprinzipien eine »Hauptbildfigur« und ein »Hauptsatz« gehören, die die Abbildung in ähnlicher Weise festlegen wie es das Pohlkesche Bilddreibein und der Pohlkesche Satz im Sonderfall der schiefen Achsonometrie tun. Die Hauptbildfigur enthält dabei immer eine lineare Abbildung des absoluten Kegelschnittes und ist im übrigen die Abbildung einer gewissen Raumfigur, die ich »Hauptraumfigur« nenne.

Die Hauptraumfigur wird von den Projektionzentren, den Bild- bezw. Spurebenen der Abbildung gebildet. Man erkennt hierbei die Analogie mit dem Pohlkeschen Satz; hier ist das Pohlkesche Dreibein $u^s\,(a^s\,b^s\,c^s)$ die Hauptbildfigur, das räumliche Dreibein $u\,(a\,b\,c)$ zusammen mit dem uneigentlichen Schrägrißzentrum die Hauptraumfigur. Sowie eine schräge Achsonometrie durch die willkürliche Wahl des Pohlkeschen Dreibeins $u^s\,(a^s\,b^s\,c^s)$ festgelegt wird, so bestimmt die willkürlich gewählte Hauptbildfigur die Hauptraumfigur und damit die Abbildung. Die innerhalb der Hauptbildfigur den absoluten Kegelschnitt abbildenden Elemente sind entweder frei wählbar oder mit den übrigen Elementen der Hauptbildfigur projektiv kovariant verbunden. Das letztere ist der Fall, wenn die Hauptraumfigur metrisch ausgezeichnet ist. Auch das leuchtet an dem Beispiel der schrägen Achsonometrie vollkommen ein. Wir sahen ja, daß der den absoluten Kegelschnitt darstellende Kegelschnitt K^s mit dem Pohlkeschen Dreibein affinkovariant verknüpft ist, wenn wir das räumliche Dreibein als Würfelecke, also rechtwinklig gleichschenklig voraussetzen. Natürlich kann man auch einen beliebigen nullteiligen Kegelschnitt K^s, der von $u^s\,(a^s\,b^s\,c^s)$ unabhängig ist, als die Abbildung des absoluten Kegelschnitts ansehen; dann ist das zugehörige räumliche Dreibein nicht rechtwinklig gleichschenklig, sondern hat eine durch die Wahl der Hauptbildfigur $\{u^s\,(a^s\,b^s\,c^s),\,K^s\}$ bestimmte Gestalt.

2. Darstellung von Strahlmannigfaltigkeiten. Wie früher hervorgehoben wurde, liegt dem Zweispurenprinzip der Gedanke der Liniengeometrie zugrunde, die Gerade als Raumelement aufzufassen. Die umfassende Durchführung dieses Abbildungsverfahrens führt mithin dazu, die Strahlmannigfaltigkeiten in das Arbeitsgebiet der darstellenden Geometrie einzubeziehen. Es ist naheliegend, dabei von der Abbildung der Geraden durch Spur- und Fluchtpunkt auszugehen.

Bezüglich der Darstellung von Regelflächen beschränken wir uns auf die folgenden Bemerkungen. Die Spurpunkte g der Erzeugenden bilden eine Kurve S, die

[1] E. Kruppa, Ueber den Pohlkeschen Satz. Stzgsb. Ak. (math. nat.), Wien 1907, Abt. IIa, 126, S. 931 bis 936; Zur achsonometrischen Methode der darstellenden Geometrie, ebenda 1910, 119, Abt. IIa, S. 487 bis 506.

[2] Verallgemeinerungen des Pohlkeschen Satzes, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 1918, 27, S. 20 bis 36. Weitere neue Literatur zum Pohlkeschen Satz: Th. Schmid, Einfache Rekonstruktion für ein nach dem Pohlkeschen Satze hergestelltes Bild, Zeitschr. f. d. Realschulwesen, Wien 1915, 40; Der Kegelschnitt als Zentralbild eines Kreises und das Zentral-, Parallel- oder Normalbild eines rechtwinkligen Achsensystems (Pohlke-Satz), Stzgsb. Ak. (math. nat.), Wien 1918, Abt. IIa, 127, S. 1517 bis 1528; O. Danzer, Ueber die Sätze von Gauß und Pohlke, ebenda 1918, 127, Abt. IIa, S. 1701 bis 1722; E. Kruppa, Rekonstruktion einer Schraubenlinie aus einem Schrägriß, ebenda 1916, 125, S. 967 bis 974; Formeln zur Aufgabe von Pohlke, ebenda 1917, 126, S. 61 bis 66; Ein Analogon zur Gaußschen Formel der normalen Achsonometrie, Arch. Math. Phys. 1917, 26, S. 204 bis 206.

[3] Gelegentlich meiner Bearbeitung von L. A. dort eingearbeitet.

Bildspur, die Fluchtpunkte g_u^c eine Kurve S_u^c, die Fluchtspur. Die Bildpaare (gg_u^c) bilden eine Punktverwandtschaft zwischen S und S_u^c. Hat diese die Eigenschaft, daß die Tanganten S und S_u^c in entsprechenden Punkten parallel sind, so ist die Regelfläche abwickelbar, also eine Torse. Während die Abbildung von Regelflächen seit jeher eingehend behandelt wurde, bringt L. A., wohl zum erstenmale in einem Buche, auch eingehende Betrachtungen über die Abbildung von Strahlkongruenzen und Strahlkomplexen. Einiges darüber ist auch in der italienischen Literatur, in Arbeiten von Del Re u. a., zu finden. Die Bildpaare (gg_u^c) der Strahlen einer Kongruenz bilden in Π eine Punktverwandtschaft zwischen dem Spurfeld (g) und dem Fluchtfeld (g_u^c). Daß die durch einen Punkt gehenden Strahlen Bildpaare (gg_u^c) haben, die einer zentrischen Aehnlichkeit angehören, ist ein einfacher Sonderfall der letzten Bemerkung. Man findet in L. A. eingehende Untersuchungen über die Strahlkongruenzen, die sich als Aehnlichkeiten, Affinitäten, Kollineationen und Möbiussche Kreisverwandtschaften abbilden. Von besonderem Interesse bei der Behandlung einer Strahlkongruenz ist ihr Brenngebilde, das die Zusammenfassung der Kongruenzstrahlen zu Torsen leicht ermöglicht. Der Satz, daß sich eine Strahlkongruenz in der Umgebung eines beliebigen regulären Strahles in zwei getrennte Scharen von je ∞^1-Torsen (Kegel nicht ausgeschlossen) zerlegen läßt, führt in der Zeichenebene zur Aufgabe, die Punktepaare $(g g_u^c)$ der abbildenden Verwandtschaft derart in Kurvenpaare $S(g)$, $S_u^c(g_u^c)$ zusammenfassen, daß die Tangenten in entsprechenden Punkten g, g_u^c parallel sind. In den infinitesimalen Umgebungen zweier entsprechender Punkte $(a\,a_u^c)$ ist jede Verwandtschaft i. a. eine Affinität. Dieser entspricht im Raum ein Strahlnetz (= Kongruenz 1. O. u. 1. Kl.), welches die Kongruenz im entsprechenden Strahl A »berührt«. Diese Affinität führt den Einheitskreis um a in eine Ellipse mit der Mitte a_u^c über, die man bekanntlich die Indikatrix der Verwandtschaft für die Stelle $(a\,a_u^c)$ nennt. Gelegentlich der Bearbeitung von L. A. habe ich die Indikatrix zur Konstruktion der Brennpunkte, der Brennebenen, der Grenzpunkte und der Hauptebenen herangezogen, wodurch die wichtigsten differentialgeometrischen Begriffe aus der Theorie der Strahlkongruenzen der zeichnerischen Behandlung zugänglich werden.

Während sich die Strahlkongruenzen auf die Punktverwandtschaften in Π abbilden, führt die zentralprojektive Abbildung der Strahlkomplexe zu den Punkt-Kurvenverwandtschaften in Π. In der Tat bilden die durch einen Punkt a von Π gehenden Komplexstrahlen i. a. einen Kegel, dessen Fluchtkurve A_u^c die dem Punkt a zugeordnete Kurve der genannten Verwandtschaft ist; irgend einem Punkt a_u^c von A_u^c entspricht eine durch a gehende Kurve A, die Bildspur des Komplexstrahlzylinders mit der uneigentlichen Spitze a_u. Umgekehrt bestimmt irgend eine Punkt Kurvenverwandtschaft $(a \rightarrow A_u^c)$ oder $(a_u^c \rightarrow A)$ einen Strahlkomplex im Raum. Von besonderem Interesse ist natürlich die Abbildung des linearen Strahlkomplexes, des Strahlgewindes. Hier bilden die durch einen Punkt gehenden Komplexstrahlen ein Strahlbüschel, dessen Ebene die Nullebene α des Nullpunktes a heißt. Nach dem Gesagten ist die abbildende Verwandtschaft die Punkt-Geradenverwandtschaft $a \rightarrow A_u^c$, die jedem Punkt a von Π die Fluchtspur seiner Nullebene zugeordnet. Man erkennt leicht, daß sie eine Korrelation mit zerfallenden Koinzidenzgebilden ist; wenn das Gewinde durch die unendlichferne Gerade U der Bildebene Π geht, ist sie einfach singulär, wobei die auf U liegenden Nullpunkte p_u und w_u von Π und der unendlichfernen Ebene Ω die singulären Punkte sind. Ueber die Verteilung der Bildpaare $(a\,a_u^c)$ der Gewindestrahlen gilt in diesem Fall der Satz, daß sie an die Paare entsprechender Strahlen zweier perspektiv liegenden Parallelbüschel mit den Scheiteln w_u bezw. p_u gebunden sind.

Von diesem Satz läßt sich (L. A., Nr. 82, 83) folgende Anwendung machen. Bei der Abbildung des Punktraumes nach dem Zweibilderprinzip ergab sich, daß die Bildpaare $(a'\,a'')$ der Raumpunkte a an die Paare entsprechender Strahlen zweier perspektiven Strahlbüschel $o_2'(a'\ldots) \overline{\wedge}\, o_1''(a''\ldots)$ gebunden sind. Denkt man sich o_2' und o_1'' unendlichfern, so sind die Büschel Parallelstrahlbüschel, und es besteht die Möglichkeit, jedes Bild-

paar $(a' a'')$ in doppelter Art räumlich zu deuten: Einerseits als Bildpaar eines bestimmten Raumpunktes a, anderseits nach dem zuletzt hervorgehobenen Satz über die Abbildung eines Strahlgewindes, als Bildpaar $(a = a', a^c_u = a'')$ eines Strahles eines Strahlgewindes durch die unendlichferne Gerade der Bildebene. Bei näherem Zusehen findet man, daß hier eine Reyesche Abbildung des linearen Strahlkomplexes auf den Punktraum vorliegt. Die Bildpaare $(g\, g^c_u)$ eines Büschels von Nullstrahlen bilden ähnliche Punktreihen auf zwei parallelen Trägern G', G'', aus denen sie durch die perspektiven Büschel $(o_2') \overline{\wedge} (o_1'')$ ausgeschnitten werden. Da sich der gemeinsame unendlichferne Punkt von G' und G'' selbst entspricht, ist er das zusammenfallende Bildpaar eines Koinzidenzpunktes. L. A. enthält eingehende Untersuchungen und Literaturangaben über das Koinzidenzproblem. Für den vorliegenden Zweck entlehnen wir daraus bloß das folgende Ergebnis. Das Koinzidenzgebilde (d. i. die Gesamtheit der Raumpunkte mit zusammenfallenden Bildpaaren) des allgemeinen Zweibilderprinzips besteht aus $X_{12} = [\Pi_1\, \Pi_2]$ und einem durch o, o_1 und o_2 gehenden Kegelschnitt, der X_{12} schneidet. Aus einem bald ersichtlichen Grunde fassen wir nun diesen reellen Kegelschnitt J als absoluten Kegelschnitt einer euklidischen Geometrie auf, nennen ihn den pseudoabsoluten Kegelschnitt und sinngemäß irgendeine ihn schneidende Gerade eine Pseudominimalgerade (kurz P-Minimalgerade). Mittels dieser Begriffsbildung läßt sich das zuletzt Gesagte dahin aussprechen, daß den Strahlen eines Nullbüschels eine P-Minimalgerade G mit dem Bildpaar $(G' G'')$ entspricht; auch umgekehrt entspricht jeder P-Minimalgeraden ein Nullbüschel. Wir erhalten damit eine umkehrbar eindeutige Abbildung $\mathfrak{L}$ des Komplexes der P-Minimalgeraden auf die Nullbüschel. Da aber die Nullbüschel durch ihre Scheitel umkehrbar eindeutig bestimmt sind, wollen wir die Abbildung $\mathfrak{L}$ als eine Verwandtschaft zwischen den Raumpunkten und den P-Minimalgeraden auffassen. Beschreibt nun ein Raumpunkt eine Gerade, so beschreibt die entsprechende P-Minimalgerade eine Regelfläche 2. O. durch den pseudoabsoluten Kegelschnitt J, also eine P-Kugel. Wir gelangen damit zu einer projektiven Umformung der Lieschen Strahl-Kugelverwandtschaft. Der Haupteigenschaft der Lieschen Verwandtschaft, die Haupttangentenkurven einer Fläche in die Krümmungslinien überzuführen, entspricht in unserer projektiven Umformung die Eigenschaft, die Haupttangentenkurven in die P-Krümmungslinien überzuführen, eine Relativierung des Krümmungslinienbegriffes, die auf S. Lie zurückgeht und in mehreren Arbeiten von E. Müller in verschiedenen Formen auftritt, mit denen wir uns noch zu beschäftigen haben werden. Dieses Beispiel rechtfertigt wohl den Gedanken, daß die Analysis noch manches enthält, was sich einer darstellend-geometrischen Behandlung zuführen läßt.

Bisher haben wir bloß eine zentralprojektive Abbildung der Geraden ins Auge gefaßt. Außer dieser und den andern geläufigen Abbildungsverfahren lassen sich aber auch noch andre Abbildungen erfinden, die auch das Kennzeichen der darstellenden Geometrie tragen, nämlich eine zeichnerische Behandlung zuzulassen. Soll die darstellende Geometrie ihre ausgetretenen Wege verlassen, so wird sie sich auch allgemeinereren Abbildungen [1]) zuwenden müssen. Mildert man die Bedingung der Konstruierbarkeit oder läßt man sie fallen, so gelangt man in das Gebiet der Uebertragungsprinzipien. Da sich für Wissensgebiete meistens keine genauen Grenzen abstecken lassen und es nur wertvoll ist, wenn verschiedene Gebiete innig ineinandergreifen, so wird wohl der darstellenden Geometrie auch die Aufgabe zufallen, allgemeinere Uebertragungsprinzipien zu untersuchen, auch wenn die Bedingung der Konstruierbarkeit mit Zirkel, Lineal oder andern Hilfsmitteln nicht leicht zu erfüllen ist, sobald gewisse Aufgaben aus ihrem engern Fachgebiet ungezwungen dazu Veranlassung geben. Das folgende Beispiel soll ein Beleg für diesen Gedanken sein.

Das allgemeine Zweibilderprinzip läßt sich noch dadurch verallgemeinern, daß man auf die beiden Bildfelder (a'), (a'') zwei voneinander unabhängige Kollineationen ausübt. Die bisher perspektiven Ordnungsbüschel (o'_2), (o''_1) gehen dadurch in zwei projektive Ordnungsbüschel über. Diese erzeugen dann einen Kegelschnitt C^2, der das zusammenfallende Bildpaar der Koinzidenzkurve (s. o.), einer Raumkurve 3. O., ist. Die Punkte a einer Raumgeraden A bilden sich als zwei projektive Punktreihen A', A'' ab, die durch die beiden projektiven Ordnungsbüschel aus A' bzw. A'' ausgeschnitten werden.

[1]) Ueber die Bedeutung des Abbildungsbegriffes vom philosophischen Standpunkt handelt die Inaugurationsrede von E. Müller, »Das Abbildungsprinzip«, Wien (Okt. 1912) od. Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 22 (1913), S. 44—59.

Diese Projektivität $A'(a') \barwedge A''(a'')$ erzeugt einen Kegelschnitt, den wir als »Bild« der Raumgeraden A ansehen wollen. Die nähere Untersuchung dieser Abbildung führt zu dem Ergebnis, daß die ∞^4 in Π liegenden Kegelschnitte, welche in dieser Weise die Bilder der Raumgeraden sind, die Polarkegelschnitte von C^2 bezüglich der zu C^2 apolaren Kurven 2. Klasse sind. Eine zu dieser Abbildung gleichartige Abbildung findet sich in den Arbeiten einiger italienischer Geometer (vergl. L. A. S. 140, Fußnote), die jedoch keinen Zusammenhang mit der darstellenden Geometrie herstellen.

Durch eine einfache Abänderung der Abbildung der Geraden durch Spur- und Fluchtpunkt gelangt man zu einer zuerst von W. Blaschke[1]) und J. Grünwald[2]) behandelten Abbildung, die auch vom Standpunkt der Kinematik besonderes Interesse verdient und daher von E. Müller als kinematische Abbildung bezeichnet wurde. L. A. bringt eine eingehende Darlegung und eine organische Einordnung dieser Abbildung in das Lehrgebäude der darstellenden Geometrie. E. Müller gelangt zum kinematischen Bildpaar $(g_l g_r)$ einer Geraden G auf dem folgenden Weg. Man bildet nach Wahl eines festen Projektionszentrums die Gerade G durch ihr zentralprojektives Bildpaar $(g g_u^c)$ ab und dreht $(g g_u^c)$ um seinen Mittelpunkt in einem bestimmt gewählten Drehsinn durch 90°, wodurch g in den »linken Bildpunkt« g_l und g_u^c in den »rechten Bildpunkt« g_r übergeht.[3]) Die Bedeutung dieser Abbildung beruht darauf, daß die kinematischen Bildpaare der durch einen Raumpunkt p gehenden Strahlen die Punktepaare einer Bewegung (gleichsinnige Kongruenz) bilden, während die kinematischen Bildpaare der Strahlen eines Feldes einer Umlegung (gegensinnige Kongruenz) angehören. Durch diesen Satz wird die Anwendbarkeit der Abbildung auf kinematische Aufgaben ohne weiteres klar. Denken wir uns z. B. die Bildebene Π doppelt, als ein festes und ein bewegliches Feld, das eine kontinuierliche Bewegung beschreibt. Das bewegliche Feld steht mit dem festen Feld in jedem Zeitpunkt in einer gleichsinnigkongruenten Beziehung, der nach dem obigen Satz ein bestimmter Raumpunkt p entspricht. p beschreibt bei der Bewegung des Feldes eine Raumkurve, die für die gegebene kontinuierliche Bewegung charakteristisch ist und für ihre zeichnerische Behandlung auch herangezogen werden kann.

Die kinematische Abbildung kann ein besonderes Interesse auch dadurch beanspruchen, daß sie eine anschauliche Deutung eines mit ihr verbundenen Ausartungsfalles der elliptischen Geometrie liefert, den W. Blaschke »quasielliptisch« nennt. Man gelangt dazu, indem man die Frage nach allen Raumgeraden aufwirft, die einen gemeinsamen linken (rechten) Bildpunkt besitzen. Man findet, daß sie ein elliptisches Strahlnetz bilden, dessen Brennlinien zwei konjugiert imaginäre, zu Π im Abstand $\pm \mathfrak{d} i \, (i = \sqrt{-1})$ parallele Minimalstrahlen sind, wenn $\mathfrak{d}$ den Abstand des Auges von Π bedeutet. Bezeichnen wir die zu Π parallelen und symmetrischen Ebenen im Abstand $\pm \mathfrak{d} i$ mit ι_l ι_r, mit i_l und i_r die absoluten Punkte von Π, so gehören die oben genannten Brennlinien entweder dem Strahlenbüschelpaar $(i_l \iota_l)$, $(i_r \iota_r)$ oder dem Paar $(i_l \iota_r)$, $(i_r \iota_l)$ an. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß »linksparallele Gerade«, d. h. solche mit einem gemeinsamen linken Bildpunkt g_l, einem Netz angehören, dessen Brennlinien J_{ll}, J_{rr} dem ersten Strahlbüschelpaar angehören, dann werden rechtsparallele Gerade zwei konjugiert imaginäre Gerade J_{lr}, J_{rl} aus dem zweiten Büschelpaar schneiden. Mittels dieser vier Minimalstrahlbüschel läßt sich das kinematische Bildpaar $(g_l g_r)$ einer Geraden G erklären, ohne das zentralprojektive $(g g_u^c)$ heranzuziehen: Unter den zu G linksparallelen Geraden gibt es auch einen Sehstrahl durch o; für diesen gilt $g = g_u^c = g_l$. g_l ist also der Bildspurpunkt jenes Sehstrahls der diejenigen Minimalstrahlen J_{ll}, J_{rr} schneidet, die G treffen. Entsprechend ist g_r der Bildspurpunkt jenes Sehstrahls, der diejenigen Minimalstrahlen J_{lr}, J_{rl} schneidet, die G

[1]) Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. Zeitschr. Math.-Phys 60 (1911), S. 61 bis 91, 203f.

[2]) Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. Stzgsb. Ak. (mat. nat.), Wien 1911, Abt. IIa, 120, S. 677—741.

[3]) W. Blaschke und J. Grünwald verwenden statt $g g_u^c$ ein anders gebildetes Spurbildpaar. Allgemein ist, wie ich in L. A. gezeigt habe, jede Abbildung durch Spurbildpaare geeignet, bei der sich die durch einen Raumpunkt gehenden Geraden auf die Punktepaare einer zentrischen Aehnlichkeit abbilden.

treffen. Nun lassen sich die vier Minimalstrahlbüschel $(i_l\, t_l)$, $(i_r\, t_r)$, $i_l\, t_r)$, $(i_r\, t_l)$ als Ausartung einer imaginären Fläche 2. O. auffassen. Sie können daher als das absolute Gebilde einer quasielliptischen Geometrie aufgefaßt werden, die im Sinne von F. Klein durch die Gruppe der Kollineationen bestimmt wird, die die Figur jener vier Minimalstralbüschel in sich überführen. Diese Kollineationen treten in unserer Abbildung aber in höchst einfacher Weise in Erscheinung: Es erfahren dabei die beiden Bildfelder (g_l) und (g_r) zwei gleichartige ähnliche Umformungen mit demselben Aenderungsverhältnis. Näher darauf einzugehen, verbietet der geringe zur Verfügung stehende Raum.

Zum Schlusse dieses Abschnitts möchte ich noch kurz auf die Abbildung des Linienraumes durch die windschiefe Projektion von L. Tuschel[1]) hinweisen, die L. Eckhart[2]) zu einer bemerkenswerten Abbildung des Strahlgewindes verwendet hat. In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit habe ich[3]) davon Gebrauch gemacht, um die Misessche Abbildung von Kräften im Raum in das Lehrgebäude der darstellenden Geometrie einzuordnen.

L. Tuschel wählt zur Festlegung der windschiefen Projektion ein Strahlnetz, also die Gesamtheit aller Strahlen, die zwei feste, reelle oder konjugiert imaginäre Gerade F_1, F_2 schneiden, und ordnet jedem Raumpunkt p den Schnittpunkt des durch ihn gehenden Netzstrahls mit der Bildebene Π als windschiefe Projektion p^n zu. Beschreibt p eine Gerade, so bewegt sich p^n in Π auf einem Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte f_1, f_2 von F_1, F_2 mit Π geht. Das Strahlbündel durch p bildet sich als Kegelschnittbündel ab, dessen Kegelschnitte durch f_1, f_2 und p^n gehen. Irgend ein Kegelschnitt G^n in Π, der bloß durch f_1 und f_2 geht, wird von einer Regelschar 2. O., die von Strahlen des projizierenden Netzes gebildet wird, geschnitten. Alle Leitstrahlen G dieser Regelschar haben mithin in G^n ihre windschiefe Projektion. Jeder Punkt g auf G^n ist der Spurpunkt eines Leitstrahls G; demnach bestimmt ein Kegelschnitt G^n durch f_1, f_2 und ein auf ihm liegender Punkt g in der angegebenen Weise eine Raumgerade G. Ist p ein Punkt auf G und bezeichnen $f_1{}^*$ und $f_2{}^*$ die Schnittpunkte der Ebenen $[\varphi_2 = F_2 \cdot f_1 f_2]$ und $\varphi_1 = [F_1 \cdot f_1 f_2]$ mit g, so bilden sich die vier Punkte p, g, $f_1{}^*$, $f_2{}^*$ von G als die vier Punkte p^n, g, f_1, f_2 von G^n ab, und zwar derart, daß diese beiden Vierergruppen dasselbe Doppelverhältnis $\mathfrak{p}$ bestimmen. $\mathfrak{p}$ kann mithin als Kote des Raumpunktes p angesehen werden.

Für die Anwendung der windschiefen Projektion ist jener metrische Sonderfall besonders bequem und wichtig, in dem F_1 und F_2 konjugiert imaginäre Minimalgerade durch die absoluten Punkte von Π sind. Aus dieser Annahme folgt unmittelbar, daß sich jede Gerade G als Kreis G^n darstellt; umgekehrt bestimmt jeder Kreis G^n in Π mit einem auf ihm liegenden Punkt g eine Raumgerade G. Das aus einem Kreis und einem auf seinem Umfang liegenden Punkt bestehende Gebilde nennt L. Tuschel einen befestigten Kreis. Wir haben also eine Abbildung der Raumgeraden auf die befestigten Kreise der Bildebene gewonnen. Ist nun p ein Punkt einer durch einen befestigten Kreis $(g\, G^n)$ dargestellten Geraden, so kann nach E. Müller an Stelle des früher erwähnten Doppelverhältnisses der zum Bogen $\overset{\frown}{g\, p^n}$ gehörige Peripheriewinkel eingeführt und Winkelkote des Raumpunktes genannt werden. Irgend zwei zu Π parallele Ebenen schneiden im vorliegenden Fall das Netz in ähnlichen Punktfeldern. Ist Π insbesondere die Mittelebene von φ_1 und φ_2, so schneiden irgend zwei zu Π symmetrische Ebenen das Netz nach kongruenten Feldern. Bezeichnet dann H den zu Π normalen Netzstrahl, so gehen die beiden Felder durch eine Schraubung um den Hauptstrahl H ineinander über. Da F_1 und F_2 bei den Drehungen um H festbleiben, geht das Netz dabei in sich über und heißt deshalb ein Drehnetz. In diesem Fall (Drehnetz und Π als Mittelebene von φ_1 und φ_2) nennt E. Müller[4]) die windschiefe Projektion Netzprojektion und die Bildelemente Netzrisse. Wir werden auch noch später auf die Anwendung der Netzprojektion zurückkommen; hier wollen wir bloß auf die erwähnte Eckhartsche Abbildung des linearen Strahlkomplexes eingehen.

---

[1]) Ueber eine Schraubliniengeometrie und deren konstruktive Verwertung, Stsgsb. Ak. (math. nat.) Wien 1911, IIa, 120, S. 231 bis 254.

[2]) Eine Abbildung der linearen Strahlkomplexe auf die Ebene, Stsgsb. Ak. (math. nat.) Wien 1918, IIa, 127, S. 91 bis 118.

[3]) Ueber die Misessche Abbildung räumlicher Kräftesysteme, diese Zeitschrift 1924, 4, S. 146 bis 155.

[4]) Ueber Punkttransformationen, die die Ebenen des Raumes in kongruente gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen, Stsgsb. Ak. (math. nat.) Wien 1917, IIa, 126, S. 915 bis 929.

Es seien das projizierende Netz $\mathfrak{N}$ einer Netzprojektion und ein Strahlgewinde $\mathfrak{G}$ gegeben. $\mathfrak{G}$ enthält i. a. eine Regelschar 2. O. von Netzstrahlen aus $\mathfrak{N}$, unter deren Leitstrahlen auch die Brennlinien F_1, F_2 des Netzes vorkommen. Da F_1 und F_2 durch die absoluten Punkte der Bildebene Π gehen, schneidet die genannte Regelschar die Bildebene nach einem Kreis K. Bezeichnet k den Nullpunkt von Π in dem durch $\mathfrak{G}$ bestimmten Nullsystem, so faßt L. Eckhart das Punkt-Kreis-Element $(k\,K)$ als das Bild des Gewindes $\mathfrak{G}$ auf. In der Tat ist durch $(k\,K)$ ein linearer Strahlkomplex bestimmt. Wählt man nämlich auf dem Kreis K drei Punkte g_1, g_2, g_3, so gehen durch diese drei Netzstrahlen G_1, G_2, G_3; faßt man nun G_1, G_2, G_3 als Strahlen eines Gewindes $\mathfrak{G}$ und k als Nullpunkt von Π im zugehörigen Nullsystem auf, so ist dadurch das Gewinde $\mathfrak{G}$ bestimmt, das die gegebene Bildfigur $(k\,K)$ hat. Artet $\mathfrak{G}$ in ein Strahlgebüsch aus, d. h. in den Komplex aller eine feste Gerade G schneidenden Geraden, so ist K einfach der Netzriß von G. Die bekannte Bedingungsgleichung für die Plückerschen Linienkoordinaten findet somit in der Inzidenz von k mit K einen zeichnerischen Ausdruch. L. Eckhart untersucht in seiner angeführten Arbeit die Abbildung der linearen Mannigfaltigkeiten zweiter bis fünfter Stufe von Strahlgewinden und zeigt die konstruktive Behandlung des Gewindes in dieser Abbildung.

3. Zyklographie. Die in der Zentralprojektion übliche Festlegung des Projektionszentrums durch seinen Distanzkreis führte W. Fiedler zu der von ihm unter dem Namen Zyklographie ausführlich behandelten Abbildung, die darin besteht, daß jedem Raumpunkt p sein Distanzkreis $K(p', \mathfrak{p})$ in der Bildebene Π — p' Normalriß, $\mathfrak{p}$ Bilddistanz von p — zugeordnet wird, ein Gedanke, der auch schon von B. E. Cousinery zur Lösung des Apollonischen Problems verwendet wurde. Um Eindeutigkeit zu erzielen, muß man noch festsetzen, daß die Bildkreise je nach dem Vorzeichen von $\mathfrak{p}$ positiv oder negativ orientiert werden sollen. Diese Abbildung, die W. Fiedler den Steiner-Preis der Berliner Akademie der Wissenschaften im Jahre 1884 eingetragen hat, ist recht unbeachtet geblieben. Da die darstellende Geometrie sich fast ausschließlich auf die gebräuchlichen linearen Abbildungen beschränkte, mußte die Zyklographie naturgemäß eine Sonderstellung einnehmen. Dagegen würde sie sich leicht in die darstellende Geometrie einordnen, wenn man deren Aufgabenbereich in der bereits angedeuteten Weise erweitern wollte. Die Zyklographie ist eine Modifikation der von Chasles herrührenden Abbildung, die F. Klein Minimalprojektion genannt hat (vergl. dessen autograph. Vorlesungen: Einleitung in die höhere Geometrie I, W. S. 1892 93, ausgearbeitet von F. Schilling, Leipzig 1907). Während die Zyklographie dem Punkt p den Kreis $(p', \mathfrak{p})$ zuordnet, bildet ihn die Minimalprojektion auf den Kreis $(p', \mathfrak{p}\sqrt{-1})$ ab. Im Grunde genommen sind damit eigentlich beide Abbildungen identisch. Vom zeichnerischen Standpunkt wird man aber wohl die Zyklographie bevorzugen, weil sie reellen Punkten reelle Kreise (Zykel) zuordnet. Man kann auch sagen, daß der minimalprojektive Bildkreis eines Raumpunktes p der Zentralriß des absoluten Kegelschnittes J ist, während man den zyklographischen Bildkreis erhält, indem man aus p jenen unendlichfernen Kegelschnitt C auf Π projiziert, der allen Drehkegeln angehört, deren Erzeugenden unter 45° gegen Π geneigt sind. Die von Chasles, Möbius, Cayley, Darboux, Lie und Klein über die Minimalprojektion angestellten Betrachtungen und Anwendungen lassen sich daher ohne weiteres in zyklographische übertragen, wenn man die gewöhnliche Raumgeometrie, die auf den automorphen Kollineationen von J beruht, durch jene pseudoeuklidische Geometrie ersetzt, deren absoluter Kegelschnitt C ist. In neuerer Zeit ist die Zyklographie fast ausschließlich von E. Müller gefördert worden. Er hat die Ergebnisse und Gedanken, die sich auf die Minimalprojektion beziehen, nicht bloß zyklographisch übersetzt, sondern die Zyklographie zu einer wohl noch wenig bekannten Ausgestaltung entwickelt, die im folgenden in ihren Hauptzügen gekennzeichnet werden soll.

Die gewöhnliche Raumgeometrie läßt sich in die vorhin genannte pseudoeuklidische Geometrie (P-Geometrie) mit dem absoluten Kegelschnitt C durch die Transformation $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} \to \mathfrak{y}$, $\mathfrak{z} \to i\mathfrak{z}$ überführen, wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die rechtwinkligen Punktkoordinaten mit Π als XY-Ebene bedeuten[1]). In Π ist die P-Geometrie mit der gewöhnlichen identisch. Das Quadrat des P-Abstandes zweier Punkte ist nach obigen zu definieren als $\mathfrak{e}^2 = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)^2 + (\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y}_2)^2 - (\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2)^2$. Man erkennt sofort, daß die die beiden Punkte darstellenden Zykel die Tangentialentfernung $\mathfrak{e}$ haben. Alle Raumpunkte, die von einem Punkt $m(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1)$ gleiche P-Entfernung haben, liegen auf der

[1]) E. Müller, Beiträge zur Zyklographie, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 1905, 14, S. 474 bis 578.

P-Kugel $(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)^2+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)^2-(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)^2=\mathfrak{c}^2$, d. i. in der gewöhnlichen Geometrie ein gleichseitiges Drehhyperboloid mit zu Π normaler Drehachse. Es bildet sich als das System aller Zykel ab, die vom Bildzykel M des Punktes m die Tangentialentfernung $\mathfrak{c}$ haben; man sieht leicht, daß die Zykel den Bildspurkreis der P-Kugel unter einen konstanten Winkel schneiden. Ist $\mathfrak{c}$ gleich Null, so geht die P-Kugel in einen P-Minimalkegel über, d. i. in der gewöhnlichen Geometrie ein Drehkegel, dessen Erzeugende (P-Minimalgerade) unter 45^0 gegen Π geneigt sind.

Aus der Gruppe der Kollineationen, die C in sich überführen, verdienen im Hinblick auf die Zyklographie die P-Spiegelungen besondere Beachtung, d. h. in der gewöhnlichen Geometrie die schiefen Symmetrieen, bei denen die Symmetriestrahlen zur Symmetrieebene bezüglich C konjugiert sind. Durch die zyklographische Abbildung geht aus einer P-Spiegelung die Zykeltransformation hervor, die unter dem Namen Laguerresche Speerinversion bekannt ist. Einer Schiebung des Raumes in der zu Π normalen Richtung entspricht eine Zykeltransformation, die die Mitten der Zykel festläßt und die (pos. o. neg.) Halbmesser der Zykel um die Verschiebungsstrecke additiv ändert, eine Dilatation im Sinne von Lie. Die Gruppe der Punkttransformationen, die P-Kugeln in P-Kugeln überführen, geht durch die Zyklographie, in die Gruppe der Zykeltransformationen der höheren Kreisgeometrie über. Insbesondere entspricht einer Inversion an einer P-Kugel, deren Mitte in Π liegt, die Inversion an ihrem Kehlkreis.

Eine naheliegende Verwendung der Zyklographie besteht darin, aus Sätzen der Raumgeometrie Sätze über Kreise in Π zu finden und umgekehrt. Eine große Zahl von Beispielen hierfür hat E. Müller[1]) gegeben, von denen das folgende hervorgehoben sei:

Raum: Gehen von den acht Tangentenebenen aus den Seiten eines einfachen räumlichen Vierecks an eine beliebige Kurve 2. Kl. (auch Fläche 2. Kl.) vier — den verschiedenen Seiten zugeordneten Ebenen — durch einen Punkt, so gehen auch die übrigen vier Ebenen durch einen Punkt.

Ebene: Gegeben sei eine Folge von vier Zykeln K_1, K_2, K_3, K_4. Berühren aus den vier tangierenden Speerepaaren, die die Paare benachbarter Zykel dieser Folge bestimmen, vier — den verschiedenen Paaren angehörige Speere — einen Zykel K, so berühren auch die vier übrigen Speere einen Zykel K'.

Werden die Punkte einer Kurve zyklographisch dargestellt, so erhält man eine Reihe von ∞^1 Zykeln, deren Mittelpunkte den Grundriß der Kurve bilden. Unter dem zyklographischen Bild eines analytischen Kurvenstückes K versteht man die beiden orientierten Bögen K_1^z und K_2^z, die die genannte Zykelreihe einhüllen; K_1^z, K_2^z können derselben oder verschiedenen analytischen Kurven angehören. Man erkennt in K_1^z, K_2^z sofort den Schnitt der Bildebene mit der P-Minimaltorse durch K (= Torse der gemeinsamen Tangentenebenen von K und C). Ist die Kurve eine P-Minimalkurve (d. h. schneiden ihre Tangenten C), so berühren je zwei unendlichbenachbarte Zykel der abbildenden Reihe einander und sind mithin Krümmungszykel ihrer Einhüllenden K^z; der Normalriß K' von K ist die Evolute von K^z.

E. Müller[2]) hat auch aus der zyklographischen Abbildung von Flächen wertvolle Ergebnisse gezogen. Den ∞^2 Punkten einer Fläche entspricht in Π eine Zykelkongruenz. Eine Fläche wird von einem Netz von P-Minimalkurven doppelt überdeckt, da durch jeden Flächenpunkt zwei C schneidende Tangenten gehen, die reell, imaginär oder zusammenfallend sein können. Daraus und aus dem vorigen Absatz folgert man zyklographisch, daß die abbildende Zykelkongruenz zwei Scharen orientierter Kurven (U_1^z), (U_2^z) bestimmt, derart daß jeder Zykel der Kongruenz eine Kurve aus (U_1^z) und eine aus (U_2^z) oskuliert.

Bekanntlich bilden die Flächennormalen in den Punkten einer Krümmungslinie eine Torse. Es seien m_1 und m_2 die beiden unendlichbenachbarten Punkte, die die Normale N_1 im Flächenpunkt p_1 mit der Gratlinie der Torse gemeinsam hat; m_2 ist der Schnittpunkt von N_1 mit der Flächennormale N_2 in dem zu p_1 auf der Krümmungslinie unendlichbenachbarten Punkt p_2. Uebt man auf die Strecke $m_2 p_2$ die unendlichkleine Drehung um m_2 aus, bei der p_2 in einen Punkt $p_2{}^0$ von N_1 gelangt, so ist $\overline{p_1 p_2{}^0}$ von höherer Ordnung unendlich klein, was man auch so aussprechen kann, daß die Hauptkugel $(m_2, \overline{m_2 p_2})$ die Fläche in dem auf der zugehörigen Krümmungslinie unendlich-

[1]) Einige Gruppen von Sätzen über orientierte Kreise in der Ebene, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 1911, 20, S. 168 bis 192.

[2]) Zyklographische Abbildung von Flächen und die Geometrie von Kurvenscharen in der Ebene, Stzgsb. Ak. (math. nat.) Wien 1920, IIa, 129, S. 337 bis 386.

benachbarten Punkt m_1 berührt. Diese Vorstellungen lassen sich ohne weiteres auf unsere P-Geometrie übertragen: In jedem Flächenpunkt p gibt es zwei P-Hauptkugeln, die die Fläche in p und in je einem unendlichbenachbarten Punkte berühren. Jedes p bestimmt mit diesen beiden ihm benachbarten Punkten zwei Linienelemente, deren Integralkurven als die P-Krümmungslinien der Fläche zu bezeichnen sind. Wir kommen damit wieder auf schon früher (S. 418) aufgetretene Relativierung des Krümmungslinienbegriffes, die sich zuerst in viel allgemeinerer Fassung bei S. Lie[1]) findet und von E. Müller[2]) sowohl allgemein als auch in vielen Sonderfällen eingehend dargelegt wurde. Nach dem zuletzt Gesagten geht jede P-Hauptkugel durch zwei unendlichbenachbarte P-Minimaltangenten der Fläche. Nun bildet sich aber eine P-Kugel als die Mannigfaltigkeit aller Zykel ab, die den Bildspurkreis der P-Kugel unter konstantem Winkel $\pm \alpha$ schneiden (die beiden Vorzeichen entsprechen den beiden Erzeugendenscharen). Sind nun T und T^* irgend zwei unendlichbenachbarte P-Minimaltangenten der Fläche, so läßt sich durch sie i. a. eine einzige P-Kugel legen; sind weiterhin U^z und U^{*z} die zyklographischen Bildkurven der T und T^* berührenden P-Minimalkurven, so schneidet der Bildspurkreis der P-Kugel nach obigem die beiden unendlichbenachbarten Kurven U^z und U^{*z} unter demselben Winkel α und enthält somit zwei unendlichbenachbarte Elemente einer isogonalen Trajektorie der die Fläche abbildenden Kurvenschar (U^z); er ist also ein Krümmungskreis einer Isogonalkurve des Kurvensystems (U^z). Wir können dieses Ergebnis in dem Satz aussprechen:

Die Bildspurkreise der die Fläche Φ berührenden P-Kugeln sind die Schmiegkreise der Isogonalkurven der Φ zyklographisch abbildenden Kurvenscharen (U_1^z) und (U_2^z). Ist aber eine die Fläche berührende P-Kugel zugleich eine P-Hauptkugel, so geht sie i. a. durch drei unendlichbenachbarte P-Minimaltangenten und ihr Bildspurkreis ist Krümmungskreis in einem Scheitelelement einer Isogonalkurve. Da die Φ in einem Punkt p berührenden P-Kugeln ein Büschel bilden, liegt in dem letzten Satz auch das zuerst von E. Cesàro auf anderem Wege gefundene Ergebnis, daß die durch einen Punkt gehenden Isogonalkurven einer Kurvenschar in diesem Punkt Schmiegkreise haben, die ein Büschel bilden.

In ähnlicher Weise wie bei den Isogonalkurven läßt sich auch die Betrachtung der Aequitangentialkurven eines Kurvensystems mittels der Zyklographie auf die Flächentheorie zurückführen. Unter einer Aequitangentialkurve wird dabei nach G. Scheffers eine Kurve verstanden, die mit allen Kurven des Systems die gleiche Tangentialentfernung bestimmt. Durch die zyklographische Behandlung erhalten die von G. Scheffers über Aequitangentialkurven gefundenen Sätze eine anschauliche Begründung. Durch jeden Punkt p einer Fläche Φ geht eine P-Normale von Φ, d. i. die Polare der Tangentenebene in p bezüglich des P-Minimalkegels aus p. Trägt man nun auf jeder P-Normalen eines (zweiseitigen) Flächenstückes nach der derselben Seite vom zugehörigen Flächenpunkt aus eine Strecke von konstanter P-Länge a ab, so erhält man die P-Parallelfläche Φ_a. Die durch den Flächenpunkt p gehenden P-Minimalkurven bilden sich als zwei Kurven U_1^z und U_2^z ab, für die der Bildzykel p^z von p gemeinsamer Schmiegzykel ist; die Berührungspunkte von p^z mit U_1^z und U_2^z sind die Bildspurpunkte p_1 und p_2 der Minimaltangenten durch p. Nach der obigen Erklärung ist die P-Normale von Φ durch den Punkt p die Schnittlinie der P-Minimalebenen durch die beiden P-Minimaltangenten in p. Daraus folgt, daß sich N zyklographisch als das Speerepaar $(N_1 N_2)$ abbildet, das p^z in p_1 und p_2 berührt. Bezeichnet nun p_a den auf N liegenden Punkt der P-Parallelfläche Φ_a, so berührt auch der Bildzykel p_a^z das Speerepaar $(N_1 N_2)$ in zwei Punkten p_{a1} und p_{a2} und hat (s. S. 421) von p^z die Tangentialentfernung a. Da N zugleich die P-Normale von Φ_a in p_a ist, so bilden $(N_1 p_{a1})$ und $(N_2 p_{a2})$ Linienelemente der zyklographischen Bilder U_{a1}^z, U_{a2}^z der durch p_a gehenden P-Minimalkurven von Φ_a. Die Linienelemente der Kurvenschar (U_{a1}^z) entstehen also, indem man die Linienelemente von (U_1^z) auf ihren Speeren um die konstante Strecke a verschiebt. Umgekehrt erkennt man, daß die Linienelemente, die man erhält, wenn man die Linienelemente einer Schar (U_1^z) orientierter Kurven in der angegebenen Weise verschiebt, sich zu einer Schar (U_{a1}^z) orientierter Kurven

[1]) Math. Ann. 1872, 5, S. 195 ff.

[2]) Relative Minimalflächen, Monatsh. Math. Phys. 1921, 31, S. 3 bis 19; Krümmungslinien bezüglich der Flächenmannigfaltigkeit, die aus einer Fläche durch alle Schiebungen und Dilationen hervorgeht, Stzgsb. Ak. (math. nat.) Wien 1918, IIa, 127, S. 2121 bis 2138; Ueber tripolare Ebenenkoordinaten und ein Analogon zur Bonnetschen Transformation, ebenda 1914, 123, Nr. 5; Zusammenhang zwischen relativer Flächentheorie und einer Verallgemeinerung der Zyklographie, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 1923, 32, S. 155 bis 160.

zusammenfassen lassen; greift man aus (U_1^z) und (U_{a1}^z) je eine Kurve heraus, so haben diese (wenn sie einen gemeinsamen Berührungsspeer besitzen) die konstante Tangentialentfernung a. (U_1^z) und (U_{a1}^z) bilden also zueinander Aequitangentialkurvenscharen.

Läßt man a alle reellen Werte durchlaufen, so erhält man ∞^1 Scharen (U_{a1}^z) deren Elemente U_{a1}^z eine Aequitangentialkongruenz $\{U_1^z\}$ bilden, die die Schar (U_1^z) für a = Null enthält. Jede Kurve aus $\{U_1^z\}$ hat von allen Kurven einer Schar (U_{a1}^z) dieselbe Tangentialentfernung (Einschränkung auf genügend kleine Bereiche). Die zyklographische Abbildung der zu Φ p-parallelen Flächen durch die Kurvenkongruenz $\{U_1^z\}$ und die ergänzende $\{U_2^z\}$ bestimmt in Π die Elementtransformation $(N_1 p_1) \rightarrow (N_2 p_2)$. Durchläuft p_1 den Speer N_1, so beschreibt p_2 den Speer N_2; die Elementtransformation ist also eine Speertransformation, somit auch eine Berührungstransformation. Haben zwei Punkte p_1, p_{a1} auf N_1 den mit Rücksicht auf den Speersinn gemessenen Abstand a, so haben die entsprechenden Punkte p_2, p_{a2} auf N_2 den Abstand $-a$, wie man sofort erkennt, wenn man sich vergegenwärtigt, daß p_1, p_2 die Berührungspunkte des Bildzykels von p und p_{a1}, p_{a2} die des Bildzykels von p_a mit dem Speerepaar $(N_1 N_2)$ sind. Man kann dieses Ergebnis kurz durch folgenden Satz aussprechen: Die zyklographische Abbildung der P-Normalenkongruenz (N) einer Fläche Φ ist eine gegensinnig äquilonge Speertransformation $N_1 \rightarrow N_2$.

Es wurde oben erwähnt, daß eine Kurvenschaar (U_1^z) einer durch sie bestimmten Aequitangentialkurvenkongruenz angehört. In gleicher Weise bestimmt die Schar eine Isogonalkurvenkongruenz, indem man dem Schnittwinkel alle reellen ∞^1 reellen Werte erteilt. E. Müller zeigt nun in der hier besprochenen Arbeit weiterhin, daß sich mittels der Zyklographie und einer gewissen hyperbolischen Scheingeometrie ein klarer Einblick in die zunächst von G. Scheffers bemerkten Analogien zwischen diesen beiden Gattungen von Kurvenkongruenzen gewinnen läßt. Sondert man nämlich aus der Kongruenz der Isogonalkurven die zu zwei bestimmten Schnittwinkeln α_1 und α_2 gehörigen Kurvenscharen aus, und deutet man die Schmiegzykel dieser Scharen zyklographisch als die Punkte zweier Flächen Φ_{α_1} und Φ_{α_2}, so findet man, daß diese beiden Flächen Parallelflächen im Sinne der erwähnten hyperbolischen Scheingeometrie sind, womit die Analogie mit der zyklographischen Deutung einer Aequitangentialkurvenkongruenz hergestellt ist.

Eine tiefgehende Untersuchung über die zyklographische und minimalprojektive Abbildung der Kegelschnitte findet man u. a. in einer Arbeit von W. Blaschke.[1]) O. Danzer[2]) hat einige bemerkenswerte Sonderfälle dieser Aufgabe behandelt. Eine »Anwendung der Zyklographie auf einige Kegelschnittsysteme» hat der Verfasser[3]) mitgeteilt. Schließlich hebe ich nochmals den schon auf S. 423, Fußnote, erwähnten Aufsatz von E. Müller hervor, in der gezeigt wird, daß aus einer Verallgemeinerung der zyklographischen Abbildung des vierdimensionalen Raumes auf einen dreidimensionalen Raum die bereits erwähnte relative Flächentheorie in einer sehr allgemeinen Form hervorgeht.

4. Abbildung von Kurven und Flächen. A. Die rationale Raumkurve 4. O. O. Danzer bewies den folgenden bemerkenswerten Satz über die Striktionslinie einer Regelschar eines einschaligen Hyperboloids (bekanntlich eine Raumkurve 4. O. 2. Art.) Die Striktionslinie einer Regelschar eines einschaligen Hyperboloids ist der Ort der Mittelpunkte der Strecken, die auf den Erzeugenden durch die Berührungskegelschnitte der dem Hyperboloid umschriebenen Drehzylinder ausgeschnitten werden.[4])

Auch die Theorie und Abbildung von Raumkurven 4. O. 2. Art. $C^4_{(2)}$, die bei der darstellend-geometrischen Behandlung von Regelflächen 3. Gr.[5]) auftreten, wurde durch

[1]) Untersuchungen über die Geometrie der Speere, Monatsh. Math. Phys. (21) (1910).

[2]) Ueber Kurven, die sich zyklographisch als Zykloiden abbilden, ebenda 22 (1911) S. 170 bis 176.

[3]) Stzgsb. Ak. (math. nat.), Wien 1912, IIa, 121, S. 2453 bis 2464.

[4]) Einfache Konstruktionen für metrisch spezielle Raumkurven vierter Ordn., zweiter Art, Stzgsb. Ak. (math.-nat.), Wien 1913, IIa, 122, S. 1107 bis 1134. Danzer stellte auf diese Weise drei Modelle der Striktionslinie eines Hyperboloids her, die der M. Schillingsche Verlag in Leipzig zur Ausführung übernommen hat. (Einen elementaren Beweis des Satzes findet man bei J. Hjelmslev, Darstellende Geometrie, Handbuch der angew. Math., 2. Bd., herausgegeben von H. Timerding, Leipzig u. Berlin 1914).

[5]) Schattenkonstruktionen für das Plückersche Konoid, Stzgsb. Ak. (math.-nat.) Wien 1914, IIa, 123, S. 2049 bis 2063. Von dieser Fläche handelt auch der von E. Müller angeregte Aufsatz von F. Rulf, Behandlung des Plückerschen Konoides auf Grund einer neuen Definition, 36. Jahresber. d. Franz-Joseph-Realschule in Wien (1911), wo diese Regelfläche 3. Gr. als gerades Konoid behandelt wird, das die unendlichferne Ebene in Minimalerzeugenden schneidet, eine Definition, die sich für das Plückersche Konoid als kennzeichnend erweist.

denselben, einem tragischen Unfall in jugendlichen Jahren zum Opfer gefallenen Geometer gefördert.

Einer Anregung von E. Müller folgend, hat L. Vietoris[1]) aus dem Satz von O. Danzer die folgende projektive Erzeugungsweise der $C^4_{(2)}$ gewonnen. Konstruiert man auf jeder Erzeugenden einer Regelschar 2. O. zu ihren Schnittpunkten k_1, k_2, k_3, mit drei festen Ebenen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, jenen Punkt k, für den das Doppelverhältnis einen vorgegebenen konstanten Wert δ hat, so erhält man eine Raumkurve 4. O. 2. Art. — Umgekehrt läßt sich jede solche Kurve in dieser Weise auf ∞^3 Arten erhalten. Nach E. Bertini hat eine $C^4_{(2)}$ ohne stationäre Tangente drei Bisekanten, die dadurch ausgezeichnet sind, daß jede von ihnen die Schmiegebenen ihrer beiden Schnittpunkte mit $C^4_{(2)}$ enthält. Diese drei Hauptbisekanten schneiden einander in einem Punkt. Wählt man die Ebenen dieses Hauptbisekantentrieders als die im obigen Satz mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ bezeichneten Ebenen, so folgt aus diesem, daß die $C^4_{(2)}$ mit diesem Trieder ein ganz bestimmtes Doppelverhältnis δ bestimmt. Da aber das Hauptbisekantentrieder mit der $C^4_{(2)}$ projektiv-kovariant verbunden ist, gelangen wir zu dem sehr bemerkenswerten Ergebnis, daß jede $C^4_{(2)}$ ohne stationäre Tangente in diesem Doppelverhältnis δ eine projektive absolute Invariante besitzt. Die verschiedenen Möglichkeiten für den Charakter des Hauptbisekantentrieders und die Invariante δ gestatten eine ungezwungene projektive Klassifizierung der $C^4_{(2)}$.

B. Striktionslinien. Unsere Kenntnisse über die Striktionslinien von Regelscharen hat J. Krames wesentlich vermehrt. Nach einem Satz von A. Migotti (Stzgsb. Ak. (math.-nat.), Wien 1879, II, 80, S. 3) hat eine Regelfläche vom Rang r, die die unendlichferne Ebene nicht berührt, i. a. eine Striktionslinie von der Ordnung $2r$. J. Krames strebt die Beantwortung der Frage an, unter welchen Bedingungen sich von der Striktionslinie Erzeugende absondern, so daß also der Rest, die eigentliche Striktionslinie, eine niedere als die durch $2r$ gegebene Ordnungszahl hat. Nach dem genannten Satz hat eine Regelfläche 3. Gr. i. a. eine Striktionslinie 8. O. Nun zeigte J. Krames[2]), daß die in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichung $(x^2+y^2+z^2-l^2)\,y+2(x^2-y^2-l^2)\,z=0$ gegebene Regelfläche 3. Gr. eine Ellipse als eigentliche Striktionslinie hat. In diesem Fall sondern sich von der Striktionslinie sechs Minimalerzeugende ab, die zwei Gruppen von je drei unendlichbenachbarten Erzeugenden bilden, von denen zwei einander schneiden, während die dritte zu ihnen windschief ist.

In einer anderen Arbeit[3]) behandelt derselbe Verfasser die Regelflächen 3. Gr., die einen geraden kubischen Kreis als eigentliche Striktionslinie haben. Zur Erreichung der Migottischen Ordnungszahl sind zu diesem noch zwei Minimalerzeugende und eine dreifach zu zählende unendlichferne Erzeugende in Rechnung zu ziehen. Schließlich haben wir von J. Krames eine Untersuchung über »Die Striktionslinie der Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises«[4]). Diese interessante rationale Regelfläche 4. Gr. erscheint im Verlauf einer Untersuchung von E. Müller[5]) über die Mannigfaltigkeit der Loxodromenkreise eines Ebenenbüschels. Als Loxodrome wird dabei im Sinne von G. Scheffers eine Kurve verstanden, die die Ebenen eines Büschels unter konstantem Winkel schneiden. Daß unter diesen Loxodromen auch Kreise vorkommen können, geht aus dem von G. Holzmüller mittels der konformen Abbildung des Torus auf ein Rechteck bewiesenen Satz hervor, daß die aus einem Torus durch seine doppeltberührenden Ebenen ausgeschnittenen Kreise Loxodromen des Büschels der Meridianebenen sind, ein Satz, den K. Röllner[6]) auch rein geometrisch bewiesen hat. Da die genannte Regelfläche den Rang sechs hat, müßte ihre Striktionslinie nach der Regel von Migotti von der zwölften Ordnung sein. Wie J. Krames gezeigt

[1]) Stzgsb. Ak. (math. nat.), Wien 1916, IIa, 125, S. 259 bis 283.

[2]) Die Regelfläche dritter Ordnung, deren Striktionslinie eine Ellipse ist, Stzgsb. Ak. (math.-nat.), Wien 1918, IIa, 127, S. 563 bis 584.

[3]) Die Regelflächen dritter Ordnung mit einem geraden kubischen Kreis als Striktionslinie ebenda 1923, 132, S. 165 bis 175.

[4]) Stzgsb. Ak. (math.-nat.), Wien 1919, IIa, 128, S. 622 bis 634.

[5]) Kreise als Loxodromen. Arch. Math. Phys. (3), 26 (1918), S. 73 bis 96.

[6]) Die Kreisschnitte des Torus als Loxodromen, Zeitschr. f. Realschulwesen, Wien 1915, 40, S. 664 bis 666.

hat, zerfällt sie aber in eine Raumkurve 4. O., 2. A. und acht Minimalerzeugende, die vier Paare von unendlichbenachbarten, einander schneidenden Erzeugenden bilden. Die eigentliche Striktionslinie $C^4_{(2)}$ erweist sich dabei als Haupttangentenkurve eines mit der Fläche verbundenen Plückerschen Konoids. — Aus diesen Untersuchungen, denen noch weitere ähnliche in Kürze folgen werden, geht hervor, daß sich die Ordnung $2r$ der Striktionslinie um 1 vermindert für jedes Paar von unendlichbenachbarten windschiefen Minimalerzeugenden, um 2 für jedes Paar von unendlichbenachbarten, sich schneidenden Minimalerzeugenden, um 3 für jedes Tripel von unendlichbenachbarten Minimalerzeugen, von denen sich zwei schneiden; eine unendlichferne Erzeugende zählt zweifach zur Striktionslinie, wenn das zu ihr gehörige oskulierende Paraboloid nicht gleichseitig ist, dreifach, wenn es gleichseitig ist.

C. Schraub- und Schiebflächen. Erhebliche Fortschritte in der darstellend-geometrischen Behandlung der Schraub- und Schieflächen haben E. Müller und einige seiner Schüler erzielt. In dem eingangs erwähnten Vorlesungszyklus von E. Müller ist diesem Gegenstand eine Jahresvorlesung gewidmet. Ich beschränke mich im folgenden darauf, einiges aus den darüber veröffentlichten Arbeiten mitzuteilen. Zu den Flächen, die eine einfache zeichnerische Behandlung ermöglichen, gehören die Bewegflächen; das sind die Flächen, die durch eine Bewegung einer starren Kurve erzeugt werden können, unter denen die Dreh-, Schraub- und Schiebflächen Sonderfälle sind. Einige der über sie erzielten Erkenntnisse sind auch vom Standpunkt der Kinematik von Bedeutung, wie z. B. der folgende Satz von E. Müller[1]): Eine Fläche, die aus einer Schraublinie S mit der Achse A und dem Parameter $\mathfrak{k}$ durch Schraubung vom Parameter $\mathfrak{k}_1$ um eine zu A parallele Gerade G erzeugt wird, ist zugleich eine Schiebfläche. Die eine Erzeugendenschar besteht aus den bei der Schraubung erhaltenen Lagen von S, die andere Erzeugendenschar besteht aus Schraublinien mit zu A parallelen Achsen, die den Parameter $\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}$ und den Halbmesser GA haben. Diese Schraubflächen, die auch schon L. Burmester behandelt hat, sind die einzigen, die zugleich Schiebflächen sind.

Zu besonders beachtenswerten Ergebnissen über die Theorie und Darstellung von Schraubflächen ist L. Tuschel, ein Schüler von E. Müller, gelangt. Es ist tief zu beklagen, daß eine tückische Krankheit diesen hoffnungsvollen Geometer nach Verlassen der Hochschule weggerafft hat. Seine von ihm veröffentlichten Arbeiten zeigen unübertroffen, daß die Reformgedanken seines Lehrers namhafte Fortschritte der darstellenden Geometrie zu bewirken vermögen, wenn sie auf fruchtbaren Boden fallen. Aus seiner Arbeit »Ueber eine krummlinige Projektion und deren Verwendung in der darstellenden Geometrie«[2]), die an eine Untersuchung von L. Burmester anschließt, hebe ich zunächst den folgenden Satz hervor: Rollt ein Drehzylinder $\Phi_1 (A_1, \mathfrak{r}_1)$ auf einem anderen festen $\Phi (A, \mathfrak{r})$, so erzeugt jede mit Φ_1 starr verbundene Schraubfläche σ vom Parameter $\mathfrak{k}_1$ und der Achse A_1 eine »Hüllschraubfläche« φ vom Parameter $\mathfrak{k}$, die auch durch eine Schraubung der Schraubfläche σ um A entstehen kann; dabei besteht die Proportion $\mathfrak{r} : \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{k} : \mathfrak{k}_1$. Denkt man sich Φ und Φ_1 in einer bestimmten Stellung gegeben, so kann man ∞^1 Hüllschraubflächen φ dadurch erhalten, daß man als Φ alle Zylinder nimmt, die Φ_1 in einer bestimmten Erzeugenden berühren. Es ist nun beachtenswert und für konstruktive Aufgaben wertvoll, daß alle genannten ∞^1 Flächen φ durch eine Kurve N gehen und längs ihr σ berühren. Sie bilden also ein Hüllschraubflächenbüschel. N ist für jede der Flächen φ eine Charakteristik. Da aber für $r = \infty$ die Schraubung in eine Schiebung übergeht, kommt im Hüllschraubflächenbüschel auch ein Zylinder vor. Das gibt den für die Parallelbeleuchtung einer Hüllschraubfläche φ wichtigen Satz, daß die Tangentenebenen in den Punkten einer Charakteristik von φ einen Zylinder umhüllen. Hinsichtlich der zeichnerischen Behandlung der einschlägigen Aufgaben sei noch hervorgehoben, daß dabei L. Tuschel eine von E. Müller in Vorlesungen unter dem Namen krumme Projektion eingeführte Abbildung benutzt, die darin besteht, daß die Raumpunkte mittels der Schraublinien einer Schraubung auf eine zur Schraubachse normale Ebene projiziert werden. Diese Aufgaben gestatten exakte Lösungen, wenn man

[1]) Ueber Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht, Stzgsb. Ak. (math. nat.), Wien 1909, IIa, 118, S. 3 bis 13.

[2]) Monatsh. Math. Phys. 1909, 20, S. 358 bis 368.

außer Zirkel und Lineal noch rollende Scheiben und Pauspapier[1]) als Konstruktionsmittel zuläßt. Die in den beiden zuletzt besprochenen Arbeiten niedergelegten Ergebnisse wurden von E. Müller in einem Aufsatz mit dem Titel »Ueber die Hüllflächen von Flächenscharen, die durch krumme Schiebung erzeugt werden«[2]) verallgemeinert. Diese Arbeiten hat F. Palm[3]) zur Umrißbestimmung von allgemeinen Schraub- und Drehflächen bei Parallel- und Zentralprojektion verwertet.

L. Tuschel hat auch für die Isophoten- und Isophengenermittlung bei Schraubflächen ein schönes Verfahren angegeben, wobei er die in der Differentialgeometrie geläufige sphärische Abbildung der Flächen heranzieht[4]). Er zeigt, daß sich das Isophengenproplem auf das Isophotenproblem zurückführen läßt, sobald man die sphärische Abbildung der krummen Fläche zeichnerisch beherrscht. Ist nämlich s der in der Bildebene Π liegende Mittelpunkt der zur sphärischen Abbildung verwendeten Kugel, Π_1 eine der beiden zu Π parallelen Tangentenebenen der Kugel und o der Gegenpunkt ihres Berührungspunktes, so gilt der Satz: Der Zentralriß der Kugelisophengen aus s auf Π_1 ist ein Kreisbüschel, dessen Normalriß auf Π mit der stereographischen Projektion der Kugelisophoten aus o auf Π übereinstimmt[5]). Besonders einfach gestaltet sich die Anwendung dieses Satzes bei der Wendelfläche.

In dieser Arbeit verwendet L. Tuschel auch eine Flächenabbildung, die E. Müller in seinen Vorlesungen schon früher verwertet und in einer Arbeit[6]) mitgeteilt hat, aus der ich nun die folgenden Gedanken hervorhebe. Diese Abbildung besteht darin, daß jeder Tangente T einer Fläche ihr Fluchtpunkt t_u^c und jeder Tangentenebene Π deren Fluchtspur T_u^c für ein fest gewähltes Auge o zugeordnet wird. Diese einfache Abbildung leistet bei der zeichnerischen Behandlung gewisser Flächengattungen, insbesondere der Schiebflächen und deren Verallgemeinerungen wertvolle Dienste. Sie läßt sich zu einer die abgebildete Fläche bestimmenden Darstellung ausgestalten, indem man zur Fluchtlinie T_u^c einer jeden Tangentenebene τ auch noch den Normalriß p' des Berührungspunktes p angibt. Es wird dadurch der Fläche eine Reziprozität $p' \rightarrow T_u^c$ als Bild zugeordnet. Umgekehrt stellt eine Punkt Geradenverwandschaft $P(x\,y)\,\xi + Q(x\,y)\,\eta + c = 0$ dann und dann nur eine Fläche dar, wenn $\partial P(x\,y)/\partial y = \partial Q(x\,y)/\partial x$ ist. Für die konstruktive Behandlung der Schraubflächen empfiehlt es sich, die Abbildung dadurch abzuändern, daß man t_u^c und T_u^c noch durch einen rechten Winkel um den Normalriß o' nach t_u^n bezw. T_u^n dreht, wobei man o auf der Schraubachse A so annimmt, daß sein Abstand von der zu Π normalen Bildebene gleich der reduzierten Ganghöhe $\mathfrak{k}$ ist und jenen Drehsinn wählt, den der Grundriß eines Punktes beschreibt, der sich auf einer Bahnschraublinie in der Richtung $\overrightarrow{\Pi o}$ bewegt. In dieser Form hat zuerst Th. Schmid[3]) die Abbildung zur konstruktiven Behandlung von Regelschraubflächen eingeführt; t_u^n und T_u^n sind die Fluchtelemente von T und τ in einer mit der Zentralprojektion (o) verbundenen Netzprojektion (S. 420). In dem bekannten Lehrbuch von Rohn und Papperitz wird t_u^n als Pol der Schraublinientangente T bezeichnet. E. Müller beweist u. a. den Satz, daß die Schraubflächen die einzigen Flächen sind, für die die Reziprozität $p' \rightarrow T_u^n$ ein Nullsystem ist, das übrigens Th. Schmid[7]) schon früher im Fall der Regelschraubflächen angewendet hat.

---

[1]) E. Müller konstruiert in seinen Vorlesungen mittels Pauspapier Eigenschattengrenzen, Licht- und Hellegleichen einer Schraubfläche.

[2]) Monatsh. Math. Phys. 1910, 21, S. 150 bis 154.

[3]) Ueber die direkte Konstruktion des perspektiven Umrisses von allgemeinen Schraubflächen, Monatsh. Math. Phys. 1912, 23, S. 274 bis 282; Ueber die Umrißbestimmung von allgemeinen Schraub- und Drehflächen in zentral- und parallelperspektiven Darstellungen, ebenda 1921, 31, S. 157 bis 172.

[4]) Zur Verwertung der sphärischen Abbildung in der darstellenden Geometrie, Stzgsb. Ak. (math. nat.), Wien 1908, IIa, 117, S. 1261 bis 1280.

[5]) Für die zeichnerische Behandlung von Isophoten und Isophengen beachte man auch den Aufsatz von K. Mack, Geometrische Grundlagen zur Isophengenkonstruktion und einige Eigenschaften der Isophengen besonderer Flächengattungen, Jahresb. d. Staatsrealschule in Wien, XIII. Bezirk, 1909.

[6]) E. Müller, Eine Abbildung krummer Flächen auf eine Ebene und ihre Verwertung zur konstruktiven Behandlung der Schraub- und Schiebflächen, Stzgsb. Ak. (math. nat.), Wien 1911, IIa, S. 1763 bis 1810.

[7]) Ueber Berührungskurven und Hülltorsen der windschiefen Helikoide, Stzgsb. Ak. (math. nat.), Wien 1890, IIa, 99, S. 952 bis 966; Ueber die Beleuchtungskurven der windschiefen Helikoide, Monatsh. Math. Phys. 1891, 2, S. 333 bis 344.

Der zeichnerischen Behandlung werden naturgemäß besonders solche Flächengattungen leicht zugänglich sein, bei denen die Abbildung $p' \rightarrow T_u^c$ (bezw. $p' \rightarrow T_u^n$) einen einfachen Charakter hat. Dies ist aber nicht nur bei Schraub- und Schiebflächen der Fall, sondern auch bei anderen allgemeineren Flächen, die dadurch in die darstellende Geometrie eingeführt werden können. Da eine Schraubfläche in sich verschraubt werden kann, hat die zugehörige Korrelation (Nullsystem) $p' \rightarrow T_u^c$ (T_u^n) bei obiger Wahl von o die zeichnerisch wertvolle Eigenschaft, daß sie bei den Drehungen um o' in sich übergeht. Die Frage, welche Flächen sich auf Nullsysteme ($p' \rightarrow T_u^c$) abbilden, die gegenüber den Streckungen aus o' invariant sind, führt zu den Logarithmoiden, worunter E. Müller die Flächen versteht, die dadurch entstehen, daß eine logarithmische Linie irgend eine Bewegung ausführt, bei der die Asymptote in sich verschoben wird. Von diese Logarithmoiden handelt, nebenbei bemerkt, auch eine Arbeit von L. Tuschel[1]). Zu einer bemerkenswerten Verallgemeinerung der Dreh- und Schraubflächen gelangt E. Müller durch die Beantwortung der Frage, bei welchen Flächen die abbildende Reziprozität $p' \rightarrow T_u^c$ eine infinitesinale Drehstreckung und damit eine eingliedrige Gruppe von Drehstreckungen um o' gestattet. Diese sind sinngemäß als Schraubaffinflächen zu bezeichnen, da sie die folgende unmittelbare Erklärung zulassen: Es gibt eine dreigliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_3$ von Affinitäten, die sich aus den achsialen Streckungen bezüglich einer festen Achse A (d. s. die windschiefen Affinitäten, die A und die unendlichferne Gerade der zu A normalen Ebenen punktweise festlassen) den Drehungen um A und den Schiebungen in der Richtung von A zusammensetzt. Irgend eine infinitesimale Transformation aus $\mathfrak{G}_3$ erzeugt durch ihre Wiederholung eine kontinuierliche eingliedrige Untergruppe $\mathfrak{g}$, deren Bahnkurven auf Wendelflächen liegen und sich im Normalriß auf eine zu A normale Bildebene als logarithmische Spiralen mit dem Pol A' darstellen. Die durch eine gegebene Kurve gehenden Bahnkurven von $\mathfrak{g}$ bilden zusammen eine Schraubaffinfläche; läßt insbesondere die erzeugende infinitesinale Transformation die Achse A punktweise fest, so ist die Fläche sinngemäß als Drehaffinfläche zu bezeichnen.

Dieser Verallgemeinerung der Schraub- und Drehflächen hat L. Tuschel[2]) eine Verallgemeinerung der Schiebflächen an die Seite gestellt, die er achsiale Schiebflächen nennt. Er geht von der dreigliedrigen, durch eine Achse A bestimmten Transformationsgruppe Γ_3 aus, die aus den achsialen Schiebungen mit der Achse A[3]), den Drehungen um A und den Schiebungen in der Richtung von A besteht. Man erkennt unmittelbar, daß es eine und nur eine Transformation aus Γ_3 gibt, die einen gegebenen Raumpunkt in einen vorgegebenen anderen Raumpunkt überführt; daher bestimmen zwei unendlichbenachbarte Raumpunkte eine bestimmte infinitesimale Transformation aus Γ_3. Es seien nun U und V zwei Raumkurven, die sich in einem Punkt p schneiden mögen. p bestimmt mit dem ihm auf V unendlichbenachbarten Punkt p_1 eine infinitesimale Transformation aus Γ_3, die U in eine unendlichbenachbarte Kurve U_1 überführt; es kann nun auf U_1 die infinitesimale Transformation ausgeübt werden, die durch p_1 und den zu p_1 auf V unendlichbenachbarten Punkt p_2 bestimmt wird, wodurch U_1 in U_2 übergehe. Wiederholt man das Verfahren, das man sinngemäß eine krumme achsiale Schiebung längs V nennen kann, so beschreibt U ein System von Kurven, die eine Fläche erfüllen, welche L. Tuschel eine achsiale Schiebfläche nennt. In vollkommener Analogie mit den gewöhnlichen Schiebflächen (Translationsflächen) läßt sich nachweisen, daß die oben erklärte achsiale Schiebfläche sich auch dadurch erzeugen läßt, daß man auf V die krumme achsiale Schiebung längs irgend einer Kurve aus dem System (U) ausübt. Eine infinitesimale Transformation aus Γ_3 erzeugt durch Wiederholung eine kontinuierliche eingliedrige Untergruppe Γ_3, die L. Tuschel eine gerade achsiale Schiebung nennt. Die Bahnkurven einer geraden achsialen Schiebung liegen auf Wendelflächen mit der Achse A und projizieren sich im Normalriß auf eine zu A normale Bildebene als archimedische Spiralen. Uebt man auf eine beliebige Raumkurve eine gerade achsiale Schiebung aus, so entsteht eine Fläche, die L. Tuschel als

[1]) Ueber eine Abbildung der Punkte einer Fläche auf die Geraden der Bildebene und eine sich daraus ergebende Flächengattung. (Mit einem Anhang: »Ueber eine Geometrie logarithmischer Linien.) Zeitschr. f. d. Realschulwesen, Wien 1913, 38, S. 78 bis 93.

[2]) Ueber eine Verallgemeinerung der Schiebflächen, Stzgsb. Ak. (math. nat.), Wien 1911, IIa, S. 1749 bis 1762.

[3]) So bezeichnet E. Müller eine Raumtransformation, bei der je zwei entsprechende Punkte $x_1\,x_2$ eine A normalschneidende Verbindungslinie haben und $Ax_1 - Ax_2 =$ konst. gilt.

zylindrisch-achsial bezeichnet. Diese zylindrischen achsialen Schiebflächen bilden ein Analogon zu den Schraubaffinflächen von E. Müller. Eine Schraubfläche ist nicht bloß ein Sonderfall der Schraubaffinflächen, sondern läßt sich auch als besondere zylindrisch-achsiale Schiebfläche auffassen. Zu diesen gehören auch die geraden Konoide als Sonderfälle. So bieten sich dem Geometer verschiedene neue Flächengattungen dar, die einer zeichnerischen Behandlung leicht zugänglich sind.

In der auf S. 420, Fußnote 1, genannten Arbeit gibt L. Tuschel auch eine Transformation an, die die Eigenschaft hat, die reellen Geraden des Raumes in reelle Schraublinien mit parallelen Achsen und gleichem Parameter $\mathfrak{k}$ überzuführen. Bereits auf S. 420 wurde hervorgehoben, daß sich die Raumgeraden mittels der Netzprojektion auf die befestigten Kreise der Bildebene abbilden lassen. Nun bestimmt aber ein befestigter Kreis $(k\,K)$ auch eindeutig eine Schraublinie von gegebenem Parameter $\mathfrak{k}$, wenn man k als ihren Bildspurpunkt und K als ihren Grundriß ansieht. In dieser doppelten Deutung jedes befestigten Kreises $(k\,K)$ der Bildebene, einerseits als Bild einer Raumgeraden, anderseits als Bild einer Schraublinie liegt die erwähnte i. a. eindeutige Abbildung der Raumgeraden (G) auf die Schraublinien (S) von gleichem Parameter $\mathfrak{k}$, deren Achsen zu Π normal sind. Diese Abbildung hat die Eigenschaft, daß sie die Geraden einer Ebene in Schraublinien S überführt, die auf einer Wendelfläche vom Parameter $2\,\mathfrak{k}$ liegen, und die Geraden eines Bündels in Schraublinien S, die sich in einer zu Π normalen Reihe gleichentfernter Punkte schneiden, die im Abstand $2\,\mathfrak{k}\,\pi$ aufeinander folgen. L. Tuschel faßt daher die obigen parallelachsigen Wendelflächen vom Parameter $2\,\mathfrak{k}$ als Pseudoebenen und die zuletzt genannten Reihen gleichentfernter Punkte als Pseudopunkte einer Pseudogeometrie auf, in der die Schraublinien (S) die Pseudogeraden sind. Den Schraublinien einer Schraubung vom Parameter $\mathfrak{k}$, deren Achse zu Π normal ist, entspricht ein Drehnetz $\mathfrak{N}$; demgemäß geht eine durch diese Schraubung erzeugte Schraubfläche in eine in $\mathfrak{N}$ enthaltene Regelfläche über, worin auch ein Konstruktionsprinzip für die zeichnerische Behandlung von Schraubflächen liegt. Den zu Π normalen Strahlen, die auch zum System (S) gehören, entsprechen die Netzstrahlen, des bei der Abbildung verwendeten Drehnetzes In der genannten Pseudogeometrie bilden also die Bahnschraublinien einer Schraubung vom Parameter $\mathfrak{k}$ mit zu Π normaler Achse und ebenso die zu Π normalen Geraden Netze (= lineare Kongruenzen) von Pseudogeraden. Die nach einer früheren Bezeichnungsweise (S. 426) als krumme Projektion bezeichnete Abbildung und im besonderen die gewöhnliche Orthogonalprojektion sind also Netzprojektionen im Sinne dieser Tuschelschen Schraubliniengeometrie.

An diese Arbeit von L. Tuschel hat E. Müller[1]) eine Untersuchung »Ueber die Punkttransformationen, die die Ebenen des Raumes in kongruente gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen«, geknüpft, unter denen naturgemäß auch die obige Tuschelsche Transformation vorkommen muß.

Die darstellend-geometrische Behandlung von Schraubflächen führte E. Müller zu dem interessanten Begriff polarer Schraubflächen, der in mehreren seiner Arbeiten vorkommt. Wird die eine Fläche Φ darstellende Reziprozität (S. 427) einer Punkttransformation derart unterworfen, daß die entstehende Reziprozität wieder das Bild einer Fläche Φ^* ist, so ergibt sich die Frage nach den Beziehungen zwischen Φ und Φ^*. Ist insbesondere Φ eine Schraubfläche, und übt man auf das Φ darstellende Nullsystem (S. 427) die Polarität an einem reellen oder nullteiligen Kreis mit der Mitte o' aus, so erhält man ein Nullsystem, das die zu Φ »polare Schraubfläche« Φ^* darstellt (siehe die auf S. 427 Fußnote 6 genannte Arbeit). Es läßt sich zeigen, daß Φ und Φ^* einander in einem Möbiusschen Nullsystem entsprechen. Eine tiefere Einsicht in das Wesen und die Bedeutung des Begriffes polarer Schraubflächen gibt E. Müller in einer Arbeit mit dem Titel: »Schraubflächen und Strahlgewinde«[2]). Nach L. Bianchi ist jede Schraubfläche Φ Evolutenfläche einer Schar paralleler Schraubflächen und bestimmt daher eine zweite Evolutenfläche Φ^*. E. Müller zeigt, daß Φ und Φ^* polare Schraubflächen bezüglich des Nullsystems sind, das zu der die Fläche Φ erzeugende Schraubung gehört. Weiterhin ist die zuletzt genannte Arbeit u. a. der Ermittlung der Schraubflächen gewidmet, die eine Schar ebener Krümmungslinien besitzen. Dabei ergibt sich auch auf rein geometrischem Wege der von L. Bianchi gefundene Satz, daß das Schraubtraktoid die einzige Schraubfläche ist, deren Meridiane Krümmungslinien sind.

[1]) Stzgsb. Ak. (math.nat.), Wien 1917, IIa, 126, S. 915 bis 929.

[2]) Stzgsb. Ak. (math.nat.), Wien 1916, IIa, 125, S. 921 bis 965.

Im Verlaufe unserer Betrachtungen sind uns bereits einigemale Verwandtschaften entgegengetreten, die E. Müller als achsial bezeichnet. Es sind dies die Verwandtschaften, die das Netz aller eine feste Achse A normal schneidenden Geraden in sich transformieren, wie z. B. die achsialen Streckungen, die achsialen Schiebungen, die Affinschraubungen (unter denen die gewöhnlichen Schraubungen und Drehungen um eine Achse als Sonderfälle enthalten sind) und die Tuschelschen geraden achsialen Schiebungen. Eine eingehende Untersuchung hat E. Müller der achsialen Inversion gewidmet, einer Verwandtschaft, die gleich den früheren dem darstellenden Geometer eine Reihe neuer Aufgaben liefert. Eine achsiale Inversion wird durch die Bedingung erklärt, daß je zwei entsprechende Raumpunkte x_1 und x_2 einer eine feste Achse A normal schneidenden Geraden angehören, und daß das Abstandsprodukt $\overline{Ax_1} \cdot \overline{Ax_2}$ konstant ist. Durch eine achsiale Inversion gehen i. a. die Raumgeraden in gerade kubische Kreise über, die die Inversionsachse zur Asymptote haben; die einer Ebene entsprechende Fläche ist i. a. eine Fläche 3. O., deren zu A normale Schnitte Kreise sind, die von A und einer gleichseitigen Hyperbel mit der Asymptote A in Gegenpunkten geschnitten werden. Aus den zahlreichen Ergebnissen, die E. Müller[1]) mittels der achsialen Inversion erzielt hat, hebe ich bloß eine Anwendung auf die Schraubflächen hervor, bei der der früher erwähnte Begriff polarer Schraubflächen von neuem auftritt. Es seien: Φ eine zur Schraubung $(A, \mathfrak{k})$ gehörige Schraubfläche, Φ^* die der Fläche Φ in dem zur Schraubung $(A, \mathfrak{k})$ gehörigen Nullsystem entsprechende polare Schraubfläche, Φ_1 die zu Φ^* achsialinverse für die achsiale Inversion $(A, -\mathfrak{k}^2)$ und Φ^*_1 die zu Φ_1 im letztgenannten Nullsystem polare Schraubfläche. Diese vier Schraubflächen stehen nun in folgenden Beziehungen. Φ_1 ist die zweite Brennfläche der Falltangentenkongruenz von Φ; Φ^* ist die zweite Brennfläche der Falltangentenkongruenz von Φ^*_1; Φ ist die zweite Brennfläche der Schraubtangentenkongruenz von Φ_1; Φ^*_1 ist die zweite Brennfläche der Schraubtangentenkongruenz von Φ^*.

L. Eckhart[2]) hat eine zur achsialen Inversion gewissermaßen duale Ebenentransformation behandelt, bei der je zwei entsprechende (orientierte) Ebenen sich in einer eine feste Achse A normal schneidenden Geraden treffen, und deren Neigungswinkel Θ und Θ_1 gegen A der Gleichung $\operatorname{tg} \Theta/2 \operatorname{tg} \Theta_1/2 = \text{konst.}$ genügen. Die in einer Ebene durch A liegenden Fallinien von Paaren zugeordneter Ebenen entsprechen demnach einander in einer Laguerreschen Spiegelung. Diese Transformation orientierter Ebenen führt die Ebenen eines Bündels i. a. in eine rationale Fläche 4. Gr. mit zwei einander schneidenden Doppelgeraden über, deren Schichtenlinien Hyperbeln und deren Fallinien Kreise sind. Im Grundriß stellen sich die Schichten- und Fallinien als ein System konfokaler Kegelschnitte dar. Von dieser Fläche gelangt man leicht zu allgemeinern Flächen 4. O., deren Fallinien Kegelschnitte sind.

E. Müller hat wiederholt darauf hingewiesen, daß in der Flächentheorie die dem darstellenden Geometer so geläufige projektive Denkweise nicht hinreichend eingedrungen ist, daß insbesondere für viele Sätze die dualen Gegenstücke fehlen. Eine Ergänzung in dieser Richtung gibt die Arbeit: Duale Gegenstücke zu den flächentheoretischen Sätzen von Meusnier und Euler[3]) Wohl hat schon früher Th. Schmid[4]) den Plückerschen Begriff der konischen Krümmung bereits in der 1. Auflage seines eingangs besprochenen Lehrbuches der darstellenden Geometrie verwendet, während W. Blaschke[5]) zuerst die zur Eulerschen Gleichung duale angegeben hat.

5. Darstellende Geometrie des vierdimensionalen Raumes. Das allgemeinste Zweibilderprinzip, S. 414, bildet die Raumpunkte p i. a. eineindeutig auf die orientierten Punktepaare der Bildebene in der Weise ab, daß je zwei zusammengehörende Punkte p', p'' auf entsprechenden Strahlen zweier projektiven (im besondern perspektiven) Ordnungsbüschel liegen. E. Müller[6]) zeigte, daß die Punkte eines vierdimensionalen Raumes

---

[1]) Die achsiale Inversion, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 1916, 25, S. 209 bis 251.

[2]) Ueber Flächen vierter Ordnung, deren Fallinien Kegelschnitte sind, Stzgsb. Ak. (math.-nat.) Wien 1922, IIa, 131, S. 417 bis 427.

[3]) Stzgsb. Ak. (math.-nat.) Wien 1917, IIa, 126, S. 311 bis 318.

[4]) I. Bd. 1912, S. 164, 177.

[5]) Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 117.

[6]) Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie, Jahresb. Deutsch. Math.-Ver. 1905, 14, S. 573. L. A. ist die Ausführung der in diesem Aufsatz angedeuteten Gedanken.

R_4 sich linear und i. a. eineindeutig auf die ∞^4 orientierten Punktepaare der Bildebene abbilden lassen. Man nimmt zu diesem Zweck im R_4 zwei windschiefe Gerade U_1 und U_2, deren Verbindungsraum die Bildebene Π nicht enthält, als Projektionsachsen an. Da im R_4 zwei Ebenen bloß einen Punkt gemeinsam haben, wenn sie nicht demselben R_3 angehören, so schneiden die durch einen Raumpunkt p gehenden projizierenden Ebenen $[p\,U_1]$ und $[p\,U_2]$ die Bildebene Π im Bildpaar $(p'\,p'')$ von p; umgekehrt entspricht irgend einem orientierten Punktepaar $(p'\,p'')$ von Π in dieser Weise i. a. eindeutig ein Punkt des R_4. Denkt man sich U_1 und U_2 im uneigentlichen (= unendlichfernen) Raum des R_4 gelegen, so bilden sich die Geraden des R_4 als Paare ähnlicher Punktreihen, die Ebenen als Affinitäten und die R_3 als die Paare perspektiver Parallelstrahlbüschel in Π ab; d. h. liegt ein Punkt p (a) auf einer Geraden, (b) in einer Ebene, (c) in einem R_3, so bilden p', p'' (a) ein Punktepaar, der die Gerade darstellenden ähnlichen Reihen, (b) der die Ebene abbildenden Affinität und liegen (c) auf entsprechenden Strahlen der dem R_3 zugeordneten perspektiven Parallelstrahlbüschel.

Durch metrische Spezialisierung und Einführung einer zweiten Bildebene hat L. Hofmann[1]) diese Abbildung zu einem Auf- und Grundrißverfahren für den R_4 ausgestaltet. Die Zeichenebene Π wird als »Aufrißebene« Π_2 und eine zu $\Pi = \Pi_2$ vollständig normale Ebene als Grundrißebene Π_1 gewählt. Die uneigentlichen Geraden U_1 und U_2 von Π_1 und Π_2, die reziproke Polaren der absoluten Fläche 2. O. Φ sind, werden als Projektionsachsen gewählt; mit S bezeichnen wir eine solche uneigentliche Gerade, die mit ihrer bezüglich Φ reziproken Geraden C zu U_1 und U_2 hyperbolische Lage hat und von C durch $(U_1\,U_2)$ harmonisch getrennt wird. Das Bildpaar $(p'\,p'')$ eines Punktes p von R_4 kommt nun auf folgendem Wege zustande. Man projiziert p aus U_1 auf $\Pi = \Pi_2$, wodurch man den Aufriß p'' erhält; um den Grundriß p' zu erhalten, projiziert man p aus U_2 auf Π_1 nach $\mathfrak{p}$ und dann $\mathfrak{p}$ aus S auf $\Pi = \Pi_2$ nach p'. Man erkennt die Analogie mit dem Auf- und Grundrißverfahren für den R_3, wenn man noch beachtet, daß durch die Projektion aus S das Feld Π_1 in ein kongruentes Feld in $\Pi = \Pi_2$ übergeführt wird. L. Hofmann behandelt alle wesentlichen Grundaufgaben der Lage und des Maßes in dieser Abbildung und man erkennt, daß alle sich recht einfach ausführen lassen. Es sei z. B. hervorgehoben, daß die Länge einer durch $(a'\,a'')$ und $(b'\,b'')$ gegebenen Strecke ab gleich ist der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Längen $\overline{a'\,b'}$ und $\overline{a''\,b''}$ haben.

Gelegentlich meiner Untersuchungen über den Pohlkeschen Satz habe ich auch versucht, die in meinem Beweise dieses Satzes (S. 416) angewandten Beweismittel in entsprechender Verallgemeinerung zur Bestimmung einer achsonometrischen Abbildung eines vierdimensionalen Objektraumes R_4 auf einen in ihm enthaltenen Bildraum R_3 heranzuziehen[2]). Die naheliegende Frage, ob ein beliebiges reelles dreidimensionales Vierbein $u^s\,(a^s\,b^s\,c^s\,d^s)$ des R_3 als reelle Parallelprojektion eines reellen, vierdimensionalen, rechtwinklig gleichschenkligen Vierbeins $u\,(a\,b\,c\,d)$ des R_4 angesehen werden könne, ist zu verneinen. Dagegen ist ein Vierbein $u^s\,(a^s\,b^s\,c^s\,d^s)$ des R_3 eine solche Parallelprojektion, wenn u^s nach willkürlicher Wahl von vier linear unabhängigen Punkten $(a^s\,b^s\,c^s\,d^s)$ auf der Fokalhyperbel jener nullteiligen Fläche 2. O. liegt, für die $(a^s\,b^s\,c^s\,d^s)$ ein Poltetraeder ist und deren Mitte im Schwerpunkt dieses Tetraeders liegt. Für die andern Fokalkurven ist die Abbildung nicht reell.

Zum Schluß sei auf einen Aufsatz von L. Eckhart[3]) hingewiesen, in dem ohne Beschränkung auf die Dimensionszahl allgemeine analytische Ansätze gegeben werden, aus denen die geläufigen Abbildungen der darstellenden Geometrie, sowie auch alle in den voranstehenden Betrachtungen erwähnten neueren Abbildungen als stark spezialisierte Sonderfälle hervorgehen. 402

---

[1]) Konstruktive Lösung der Maßaufgaben im vierdimensionalen euklidischen Raum, Stzgsb. Ak. (math. nat.) Wien 1921, IIa, 130, S. 169 bis 188.

[2]) E. Kruppa, Ueber Affinität und Parallelprojektion im vierdimensionalen Raume, Stzgsb. Ak. (math. nat) Wien 1909, IIa, 118, S. 15 bis 24.

[3]) Ueber die Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie, Stzgsb Ak (math. nat) Wien 1923, IIa, 132, S. 177 bis 192.

KURZE AUSZÜGE

Baumechanik.

Die **unelastische Knickung,** bei der infolge des Ueberschreitens der Proportionsgrenze die Eulerformel keine brauchbaren Ergebnisse liefert, war seit jeher ein Anlaß sich mit dem Knickproblem zu beschäftigen. Die Formeln von Hodgkinson, Rankine, Johnson u. a. und dann die in der Praxis sehr gebräuchlichen, durch zahlreiche Versuche begründeten Formeln von v. Tetmajer suchen dieser Unzulänglichkeit auf empirischem Wege beizukommen. Theoretisch wurde die Knickfestigkeit im plastischen Bereich zuerst von Engesser untersucht. In der Eulerschen Gleichung tritt an Stelle des Elastizitätsmoduls der Knickmodul, gleich der Ableitung der Spannung nach der Dehnung ($d\sigma:d\varepsilon$). Eine Verfeinerung dieses Verfahrens stammt von v. Kármán. Die entlasteten äußeren Fasern verhalten sich bei der Biegung anders als die mehr belasteten inneren. Statt des Elastizitätsmoduls ist jetzt in der Eulerformel ein Modul einzusetzen, der von der Querschnittsform abhängig ist und einen Mittelwert zwischen dem Engesserschen Modul der gesamten Formänderung und dem Elastizitätsmodul (der federnden Deformationen) bildet. Die daraus hervorgehenden Ergebnisse stimmen mit sorgfältig ausgeführten Versuchen überein.

Neuerdings behandelt R. Krohn die unelastische Knickung (Die Bautechnik 1923, S. 230 bis S. 250; die Knickfestigkeit, 71 S., 10 Textabb., Berlin 1923). Hier wird berücksichtigt, daß sich der Elastizitätsmodul von Querschnittsfaser zu Faser verändert. Krohn führt in die Rechnung den Quotienten aus Spannung und Dehnung ($\sigma:\varepsilon$), die sog. Dehnungszahl ein, deren Werte aus Zug- bzw. Druckversuchen gefunden werden. Die Spannungen im gebogenen Stab werden unter der Annahme eben bleibender Querschnitte bestimmt und da die Dehnungszahl von der zunächst noch nicht bekannten Formänderung abhängig ist, gelingt dies nur mittels sukzessiver Näherungen. Knickung ist — definitionsgemäß — vorhanden, wenn sich der achsial belastete Stab eben auszubiegen beginnt. Mit der Voraussetzung, daß beim beiderseits gelenkig gelagerten Stab die Dehnungsverhältnisse für den Mittelquerschnitt maßgebend sind, wird es möglich, einen geschlossenen Ausdruck für die Knickgleichung zu erhalten. Krohn vergleicht seine Resultate mit den Tetmajer- und den Kármán-Versuchen; die sich ergebenden Zahlenwerte sind im wesentlichen dieselben wie bei v. Kármán.

Zu den vielfachen von ihm bereits untersuchten Problemen der **Knickfestigkeit von Stabzügen** hat H. Zimmermann einen weitern Beitrag geliefert (Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, Berlin 1921, S. 153 bis S. 165). Die allgemeinen Berechnungsgrundlagen sind die: für jedes Feld des Stabzuges wird, von der klassischen Näherungstheorie der elastischen Linie ausgehend, eine »Feldgleichung« aufgestellt, die eine Beziehung zwischen den Endmomenten des Feldes darstellt. Hierzu treten die »Knotengleichungen«, die aussagen, daß jeder Knoten für sich im Gleichgewicht ist. (Zimmermann rechnet mit sog. »Spannziffern«, d. s. die Quotienten aus den Knotenmomenten und den zugehörigen Neigungsänderungen der Stabachse im Feldende). Für den offenen, eingespannten Stabzug sind diese Gleichungen aber keineswegs ausreichend. Man hat z. B. beim n-Eck, bei dem in den Ecken keine andern Stäbe angeschlossen sind, n-1 Feldgleichungen zur Verfügung (die Knotengleichungen werden jetzt gegenstandslos), jedoch n unbekannte Knotenmomente! Im Sonderfall des geschlossenen Stabzugs, bei dem die erste und letzte Ecke zusammenfallen, ist die notwendige Zahl der Gleichungen vorhanden und Zimmermann behandelt auch ausführlich den dreieckigen Rahmen mit gleichen Seiten von der Länge l. Die Knickfestigwird $P = 1{,}51\,\pi^2\,EJ/l^2$, sie ist durch die feste Verbindung um ca. 50 vH gegenüber der des einzelnen Stabes gestiegen. (E ist der Elastizitätsmodul, J ist das Trägheitsmoment des Stabquerschnitts). Dieses Ergebnis ist allerdings interessant, aber keineswegs so überraschend wie Zimmermann meint. In einer viel tiefer greifenden, das ganze Knickproblem beherrschenden Arbeit hat v. Mises als ein Beispiel auch die Knickfestigkeit des radial belasteten regelmäßigen n-Ecks behandelt (diese Zeitschr., 1923, S. 406 bis S. 422). Als kritischer Wert der Stabkraft ergab sich

$$\frac{z\cos z - \sin z}{z - \sin z} = \cos\frac{2\pi}{n} \text{ mit } z^2 = \frac{P\,l^2}{EJ}$$

und für $n = 3$ wird $z = 1{,}23\,\pi$, also $P = 1{,}51\,\pi^2\,EJ/l^2$, das Resultat das bei Zimmermann durch ein immerhin mühseliges und doch nicht allgemeines Verfahren gewonnen wird[1]).

[1]) Ich benutze gern die Gelegenheit, um darauf hinzuweisen, daß außer den Knickwerten, die aus meiner oben angeführten Gleichung folgen, auch die ganzen Vielfachen von $2\pi:n$ (nämlich $4\pi:n$, $6\pi:n$ usw.) kritische z-Werte darstellen; erst von $n = 4$ an wird dies für den kleinsten Knickwert maßgebend. Hr. C. Weber-Duisburg hat mich freundlicherweise auf diese Lücke in der Darstellung meines Vortrages aufmerksam gemacht; in der ausführlicheren Darlegung der Theorie soll darauf näher eingegangen werden.

R. v. Mises.

Ueber **Versuche mit auf Biegung und Knickung beanspruchten Flugzeugholmen** berichtet H. Müller-Breslau (Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, Berlin 1924, S. 166 bis S. 176). Bei den Tragflächenholmen der Flugzeuge ist es üblich die Spannungsermittlung für ein Vielfaches der Gebrauchslast durchzuführen und mit der Bruchfestigkeit zu rechnen. Auch bei diesen hohen Beanspruchungen wird der Elastizitätsmodul als konstant angenommen und mit Formeln gerechnet, die das lineare Hooke'sche Gesetz zur Grundlage haben. Diese Voraussetzung konnte getroffen werden, da bei Bruchversuchen, die während des Krieges von den einzelnen Heeresleitungen an ganzen Flugzeugen vorgenommen wurden (auch bei Holmbrüchen), eine günstige Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment vorhanden war. Um nun die Aenderung des Elastizitätsmoduls mit der Spannung genau festzustellen, führte H. Müller-Breslau im Materialprüfungsamt in Dahlem wichtige Versuche mit Flugzeugholmen aus. Verwendet wurden hierbei zweifeldrige Holme aus Kiefernholz mit Kastenquerschnitt von 3,2 m bzw. 2,4 m Stützweite. Die Querbelastung bestand aus gleich großen in Abständen von 40 cm angebrachten Einzellasten, die achsiale Längskraft war ein konstantes Vielfaches (40) einer Querlast. Die Durchbiegung wurde bei verschiedenen Laststufen gemessen und daraus der zugehörige Elastizitätsmodul bestimmt. Bis kurz vor dem Bruch ist der Elastizitätsmodul nahezu unverändert, das gebräuchliche Rechnungsverfahren ist somit hinreichend genau.

Durch **Stahlringe verstärkte Rohre.** Bei hydroelektrischen Anlagen bildet man aus ökonomischen Gründen die Rohrquerschnitte möglichst groß aus, um die Anzahl der Rohre zu verringern. Dem ist dadurch eine Grenze gesetzt, daß geschweißte glatte Rohr höchstens mit einer Wandstärke von 4 cm hergestellt werden können. Bei einer Anlage der Stadt Los Angeles wurden nun Rohre verwendet, die in gewissen Abständen durch aufgeschrumpfte Stahlringe verstärkt waren, eine patentierte Ausführung, die von Prof. G. Cook (London) nachgerechnet wurde. (The stresses in pipes reinforced by steel rings. Engineering 116, 1923, S. 447 bis 478). — Das Problem, Spannungen in Rohren zu bestimmen, die durch Stahlringe verstärkt sind, besitzt grundsätzliche Analogie mit dem der sogenannten Ueberschubrohre, wie sie auch bei Kanonenrohren in Gebrauch sind. Der Gedankengang der Lösung ist auch ein ähnlicher. An der Stelle des Ringes sind die radialen Verschiebungen von Ring und Rohr dieselben. In diesem Querschnitt ist das Rohr außer durch den gegebenen Innendruck noch durch einen unbekannten Außendruck beansprucht, der von der Wirkung des aufgeschrumpften Ringes herrührt. Für diese Unbekannte tritt aber als neue bekannte Größe das sogenannte Schrumpfmaß ein, das ist jener Wert, um den im spannungslosen Zustand der Außenradius des Rohres größer ist als der Innenradius des Ringes. — Da der Rohrdurchmesser im Verhältnis zu den Wandstärken t vom Rohr und h vom Ring groß ist, geht G. Cook von den Beziehungen für dünnwandige Schalen aus. An der Stelle des Ringes bleibt das unendlich lang vorausgesetzte Rohr nach der Formänderung zylindrisch, die größte Spannung ist im Querschnitt in der Mitte zwischen zwei Ringen vorhanden. — Bemerkenswert sind die Ergebnisse der Untersuchung. Wenn der Abstand zweier Verstärkungsringe e kleiner ist als $3{,}66\sqrt{t\,R}$, so wird die größte Rohrspannung kleiner, bei einem Wert zwischen $3{,}66\sqrt{t\,.\,R}$ und $8{,}5\sqrt{t\,.\,R}$ jedoch größer als beim glatten Rohr gleichen Querschnittes. Eine Zunahme des Schrumpfmaßes verringert diese Spannung im ersten Fall. G. Cook berechnet zahlenmäßig die Anlage von Los Angeles. Hierbei sind (abgerundet): $R = 100$ cm, $t = 1{,}6$ cm, $h = 4$ cm, $e = 28$ cm, Ringbreite 11 cm, Innendruck 20 kg/qcm, das Schrumpfmaß ist unbekannt. Wird eine Spannung von 950 kg/qcm zugelassen, so ist sie bei einem Schrumpfmaß von 0,033 cm im Ring erreicht, während die Spannung im Rohr jedoch nur 350 kg/qcm beträgt, also unnötig klein bleibt. Bei einem Schrumpfmaß von 0,0036 cm sind beide Spannungen gleich etwa 650 kg/qcm. Das nicht verstärkte Rohr wäre somit leichter, da hierbei die größte zulässige Spannung immer ausgenutzt wird. Die verstärkten Rohre sind aber, wie leicht einzusehen ist, dann zweckmäßig und bieten eine Gewichtsersparnis, wenn der Ring höher beansprucht werden kann als das Rohr.

Berechnung von Pleuelstangen. (William J. Kearton, The strength of forked connecting rods. Engineering 116, 1923, S. 442 bis 444). Kearton betrachtet Pleuelstangen, bei denen der Bolzen mit dem gabelförmigen Stangenkopf konstruktiv derart verbunden ist, daß Gabel und Bolzen ein einheitliches Ganzes oder nach einer in der Baustatik verwendeten Bezeichnung einen »geschlossenen Rahmen« bilden. Eine gebräuchliche Berechnungsart des gabelförmigen Teiles ist die, die Stangenkraft gleichmäßig auf die Gabeln zu verteilen und vorauszusetzen, daß diese Kräfte achsial angreifen. Die Untersuchung der Querschnitte erfolgt für die Beanspruchungen durch Längskraft und Biegungsmoment, deren Wirkungen nach dem Superpositionsgesetz zusammengelegt werden. Das Biegungsmoment ist hier das Produkt aus der halben Stangenkraft in den Abstand des Schwerpunktes des Querschnittes von der Richtungslinie der Kraft. Im allgemeinen ergeben sich so Spannungen von 350 bis 500 kg/qcm. Bei Schubstangen von manchen bestehenden Schiffsmaschinen kommt man jedoch auf Werte von etwa 1300 kg/qcm, also auf Spannungen, die auch guter Flußstahl bei dem Wechsel der Kraftrichtung keineswegs übernehmen könnte. Denn nach den Versuchen von Wöhler, Bau-

schinger u. a. beträgt für dehnbaren Stahl die Schwingungsfestigkeit (»reserval limit«), d. i. die Grenzspannung, bis zu der das Material wiederholten Beanspruchungen wechselnder Richtung und gleicher Größe auf die Dauer zu widerstehen vermag, ungefähr ein Drittel, die Ursprungsfestigkeit (»repetion limit«), d. i. jene größte Spannung, bis zu der bei wiederholten von Null ansteigenden Belastungen kein Bruch eintritt, etwa die Hälfte der Zerreißfestigkeit. Bei einer dreifachen Sicherheit, die erforderlich erscheint, sind mit einer Festigkeit von rund 4800 kg/qcm daher 530 kg/qcm bzw. 800 kg/qcm zuzulassen. Wenn man sich nun vergegenwärtigt, daß bei der Schubstange mit einer Spannung von 1300 kg/qcm nahezu die Schwingungsfestigkeit erreicht wäre, kommt man zum Ergebnis, daß sich die getroffenen Rechnungsannahmen von der Wirklichkeit weit entfernen müssen. — Kearton untersucht die Konstruktion als geschlossenen, dreifach statisch unbestimmten Rahmen. Infolge Symmetrie der Belastung, die am Bolzen gleichförmig verteilt angreift, ermäßigt sich die Zahl der Ueberzähligen auf zwei Variable, die mit Hilfe des Satzes von Menabrea (von der kleinsten Formänderungsarbeit) oder aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (den »Arbeitsgleichungen«) leicht bestimmt werden können. Biegungsmomente und Spannungen findet man jetzt in der üblichen Weise. Kearton erhält an einer Pleuelstange einer Schiffsmaschine Spannungen von etwa 350 kg/qcm und erweist durch einen Festigkeitsversuch, bei dem die Dehnungen mittels Martensscher Spiegelapparate gemessen wurden, daß Rechnung und Experiment befriedigend übereinstimmen. Diese Berechnungsmethode liefert sonach eine hinreichende Approximation.

Modellverfahren zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme von Prof. Beggs, Universität Princeton. (Entnommen einem Bericht von F. Kann, Beton u. Eisen 1923, S. 260 bis S. 261). Nach dem Reziprozitätsgesetz von Maxwell ist bei einem statisch bestimmten oder statisch unbestimmten System die Biegungslinie für die Belastungseinheit die Einflußlinie für die elastische Verschiebungsgröße, die der gewählten Belastungseinheit entspricht. H. Müller-Breslau gelang es, die Elastizitätsgleichungen, die der Berechnung statisch unbestimmter Systeme dienen, unter Zuhilfenahme des Satzes von Betti (der Verallgemeinerung des Maxwellschen Satzes) in Verschiebungen auszudrücken. Dadurch wurde es ermöglicht die Einflußlinien der Ueberzähligen eines statisch unbestimmten Tragwerks mittels Biegelinien darzustellen. Die Einflußlinie für die Ueberzählige X eines $n$fach statisch unbestimmten Systems ist proportional der Biegungslinie des mit $X = 1$ belasteten n-1fach statisch unbestimmten Hauptsystems — Darauf gründet nun Professor Beggs eine interessante mechanische Lösung, indem er bei aufeinanderfolgendem Aufsuchen der einzelnen Variabeln, die Biegungslinien experimentell bestimmt. Aus starker Pappe werden in einer Größe von etwa 50 cm Modelle hergestellt, Gelenke sind aus durch die Pappe gesteckte Nadeln gebildet. Ein Mechanismus, die Formänderungsschablone, gestattet es, in einem beliebigen Punkt des Systems, eine Kraft oder ein Moment von der Größe »Eins« wirken zu lassen. Die hierbei auftretenden Verschiebungen werden mit einem Mikrometermikroskop bis auf ca. $^1/_{600}$ mm genau gemessen. Die versuchsmäßig erhaltenen Ergebnisse zeigten bei den Beispielen Prof. Beggs eine äußerst gute Uebereinstimmung mit der Rechnung. Besonders bei komplizierten Tragwerken könnte das Experiment zur Rechnungskontrolle zweckmäßig sein. Es wird aber erst die Erfahrung lehren, wie weit man dieser Methode Vertrauen schenken kann.

Brückeneinsturz. Ueber einen Brückeneinsturz auf der chinesischen Kiaochow-Tsinan-Eisenbahn berichten die Ingenieure der japanischen Staatsbahnen Y. Tanaka und J. Nakahara (Report on the Kiaochow-Tsinan Railway Bridge Accident of February 16th, 1923, Tsingtao 1923). Im Februar 1923 stürzten die eisernen Ueberbauten der vierten und fünften Oeffnung der Yunflußbrücke (148 km von Tsingtao) ein, als ein Lastzug mit zwei gekuppelten Maschinen und acht Waggons darüber rollte. — Die Brücke ist eingleisig, besitzt untere Bahnlage und besteht aus acht Parallelfachwerk-Balkenträgern von 4,2 m Trägerhöhe und je 31 m Spannweite, die auf gemauerten Pfeilern aufruhen. Die Brücke wurde von deutschen Ingenieuren mit Material deutscher Herkunft erbaut und im Jahre 1901 dem Verkehr übergeben. Eine Lokomotive samt Tender hatte ein Gewicht von 122 t, der Lastzug ein Gewicht von rd. 5,2 t/m.

Nach den Untersuchungen der Verfasser war keine der gewöhnlichen Ursachen, wie Schienenbruch, Entgleisung und endlich das Ausknicken eines Druckorgans der unmittelbare Grund des Einsturzes. Der Unglücksfall wird auf das Reißen der Enddiagonale der vierten Oeffnung in ihrem obern Nietanschluß zurückgeführt. Dieser Stab wurde nämlich im Flußbett unter der zweiten Lokomotive mit einer Bruchfläche aufgefunden, die die charakteristischen Merkmale der Zerstörung durch achsialen Zug aufwies. Das Feld mit der gerissenen Diagonale zeigte ferner eine Verformung, wie sie etwa einem Rahmenträger entspricht, während sich das entsprechende Feld der andern Tragwand wie ein Dreiecksnetz ausgebogen hatte. Die größte Spannung in der Diagonale war aber nur rd. 1100 kg/cm², ein Wert, bei dem ein Reißen nicht eintreten dürfte, wenngleich auch der Anschluß am Knotenblech konstruktiv nicht völlig einwandfrei ausgebildet war.

Die Verfasser erklären den Bruch durch dynamische Einflüsse. Die beiden gekuppelten Maschinen liefen mit der sogen. kritischen Geschwindigkeit über den Träger, d. h. die Periode der Umdrehungen der

treibenden Räder der Lokomotive war gleich der Periode einer freien Schwingung der Brücke, womit natürlich starke Resonanzwirkungen hervorgerufen werden. Zur Bestimmung der Schwingungsperiode T der Brücke benutzen Y. Tanaka und I. Nakahara die im wesentlichen **empirische Formel** $T = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{f/g}$, **die sich** nach Messungen von Professor Dr. Omori (Tokio) und auch nach den Versuchen der Verfasser an verschiedenen Balkenbrücken ähnlicher Bauart gut bewährt haben soll. f ist die maximale Durchbiegung in Trägermitte für ruhende Last, g die Schwerebeschleunigung $9{,}82\ \mathrm{m/s^2}$. Die größte Durchbiegung wurde zu $3{,}05$ cm berechnet und daher wird $T = 0{,}35$ s. Die Periode der Umdrehungen der treibenden Räder ist gegeben durch $T_0 = 3{,}14\, D/v$, D der Raddurchmesser (hier $1{,}36$ m). Die Zuggeschwindigkeit v vor dem Einsturz wurde aus dem Abstand des herabgestürzten Tenders der ersten Lokomotive von seiner letzten Stellung über dem vierten Brückenpfeiler zu 46 km/h ermittelt. Damit wird $T_0 = 0{,}34$ s, es war also die Zuggeschwindigkeit nahezu gleich der für die Brücke kritischen Geschwindigkeit, was gefährliche Schwingungen zur Folge hat. Nicht elastisch genug verbolzte Schienenstöße, verrostete Tragfedern der Lokomotive waren noch ungünstige Nebeneinflüsse. — In einer nicht ganz durchsichtigen Ueberlegung kommen die Verfasser zum Ergebnis, daß sich die für ruhende Belastung berechneten Spannungen infolge der dynamischen Wirkung der Last um 62 vH erhöhen. Dies würde die Katastrophe aber nicht erklären.

J. Ratzersdorfer. 423

KLEINE MITTEILUNGEN

Ausbiegung eines auf Knicken beanspruchten Stabes. Will man die Ausbiegung berechnen, die ein schlanker Stab unter einer die Eulersche Knickgrenze überschreitenden Druckbelastung erfährt (Abb. 1), so versagt bekanntlich der übliche lineare Ansatz:

$$y'' = -\frac{P}{EJ}\,y, \qquad y(0) = y(l) = 0 \quad (1),$$

wo E die Elastizitätszahl, J das Querschnitts-Trägheitsmoment bezeichnet. Er führt zu dem

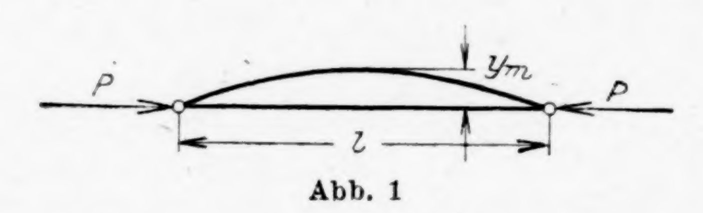


Abb. 1

an sich sinnlosen Ergebnis, daß die Ausbiegung Null ist für jede Belastung P, die von der Knicklast

$$P_\varkappa = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \quad . \ . \ . \ . \ (2)$$

verschieden ist, während sie für $P = P_\varkappa$ unbestimmt wird. Die Bedeutung dieses Resultates ist natürlich die, daß die Ausbiegung, etwa das y_m in der Stabmitte, als Funktion von P betrachtet durch eine Kurve dargestellt wird (Abb. 2), die die Abszissenachse im Punkte $P = P_\varkappa$ senkrecht trifft: Wenn man durch Vernachlässigung aller höheren Glieder die Beziehung zwischen y_m und P zu einer linearen macht, so kann man nur die **Tangente der Kurve an der Stelle** $y_m = 0$, d. i. also die Vertikale $P = P_\varkappa$, erhalten.

Der genauere Ansatz, durch dessen Vereinfachung (1) entstanden ist, enthält anstelle von y'' die Krümmung $1/\rho$. Er läßt sich mit Hilfe von elliptischen Funktionen integrieren und liefert dann die Kurve von der eben angedeuteten Gestalt. Für praktische Zwecke wird es nun erwünscht sein, ohne Benutzung so weit gehender mathematischer Hilfsmittel eine brauchbare Annäherung für den Wert von y bei gegebenem P zu erhalten. Man muß zu diesem Zweck den Ansatz (1), der die Frage ganz unbeantwortet läßt, verlassen und einen Schritt weitergehen; die Durchführung einer derartigen, ganz elementaren, zweiten Näherung ist der Zweck der folgenden Zeilen.

Fast man die Durchbiegung y (bei gegebener Last) als Funktion der Bogenlänge s auf, so ist die erste Ableitung y' gleich dem sinus des Tangentenwinkels τ, $y' = \sin\tau$, daher die zweite y'' gleich $\cos\tau$ mal der Krümmung $\tau' = d\tau/ds$. Demnach lautet die genaue Biegungsgleichung (mit s als unabhängig Veränderlicher):

$$y'' = -\varkappa^2 \cos\tau \cdot y \quad \text{bei} \quad \varkappa^2 = \frac{P}{EJ} \quad (3).$$

Setzt man $\cos\tau \sim 1$, so kommt man zu (1) zurück. Eine bessere Näherung wird man erhalten, wenn man dafür $1 - \tau^2/2$ nimmt, wobei man τ auch mit $\sin\tau = y'$ identifizieren darf. So wird aus (3):

$$y'' + \varkappa^2 y = \frac{\varkappa^2}{2}\, y'^2 y \quad . \ . \ (4).$$

Auf der rechten Seite steht hier ein Glied von dritter Ordnung in y. Es wird daher genügen, wenn wir auf dieser Seite einen Näherungswert für y einführen. Ein solcher ergibt sich aus dem linearen Ansatz (1) in Gestalt der einfachen Sinusfunktion

$$y = c \sin \varkappa_0 s \quad \text{mit} \quad \varkappa_0 = \frac{\pi}{l} \quad . \ (5).$$

Damit freilich (1) erfüllt wird, müßte $\varkappa_0 = \varkappa$, d. h. $P = P_\varkappa$ sein, während wir annehmen, daß zwischen $\varkappa$ und $\varkappa_0$ ein kleiner Unterschied besteht. Wir schreiben also für das Glied rechts in (4) zufolge (5) näherungsweise

$$\frac{c^3 \varkappa_0^4}{2} \cos^2 \varkappa_0 s \cdot \sin \varkappa_0 s$$

$$= \frac{c^3 \varkappa_0^4}{8} (\sin \varkappa_0 s + \sin 3 \varkappa_0 s).$$

Die so entstehende Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} y'' + \varkappa^2 y &= \frac{c^3 \varkappa_0^4}{8} (\sin \varkappa_0 s + \sin 3 \varkappa_0 s), \\ y(o) &= y(l) = o \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

läßt sich aber durch den Ansatz

$$y = c \sin \varkappa_0 s + c_1 \sin 3 \varkappa_0 s \quad . \quad (6)$$

integrieren. Gleichsetzen des Koeffizienten von $\sin \varkappa_0 s$ auf beiden Seiten gibt sofort

$$c^2 = \frac{8(\varkappa^2 - \varkappa_0^2)}{\varkappa_0^4} = \frac{8 l^2}{\pi^2}\left(\frac{P}{P_\varkappa} - 1\right) \quad (7),$$

womit schon im wesentlichen die Lösung unserer Aufgabe gewonnen ist, da y_m sich nur wenig von c unterscheidet. Genauer wäre nach (6) wenn man hier $s = l/2$ einsetzt, $y_m = c - c_1$. Nun erhält man aber durch Gleichsetzen auch der Koeffizienten von $\sin 3 \varkappa_0 s$ in (4'), sobald noch links $\varkappa^2 \sim \varkappa_0^2$ genommen wird:

$$c_1 = -\frac{\varkappa_0^2}{64} c^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8),$$

d. h. c_1 ist von dritter Ordnung klein, wenn man c als Größe erster Ordnung ansieht. Wir haben somit als hinreichende Näherung

$$y_m = c = \frac{\sqrt{8}}{\pi}\, l \sqrt{\frac{P}{P_\varkappa} - 1} \quad \text{oder}$$

$$\underline{y_m = 0{,}900\, l \sqrt{\frac{P}{P_\varkappa} - 1}} \quad . \; . \; . \; . \quad (9).\,^{1)}$$

Die Kurve, die $y_m : l$ als Funktion von $P : P_\varkappa$ darstellt (Abb. 2), ist eine gemeine Parabel

$$\left(\frac{y_m}{l}\right)^2 = 0{,}81\left(\frac{P}{P_\varkappa} - 1\right),$$

die, wie vorausgesehen war, die Abszissenachse im Punkte $P : P_\varkappa = 1$ senkrecht schneidet.

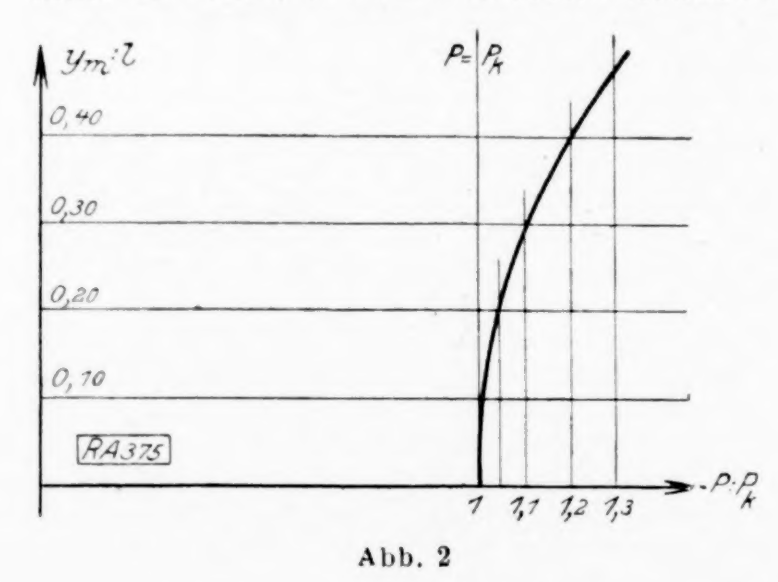


Abb. 2

Das Anwachsen von y bei Ueberschreiten der Knickgrenze erfolgt außerordentlich rasch. Ist die Last nur um 1 vH größer als die Eulersche, so beträgt nach (9) die Ausbiegung schon 9 vH der Stablänge, also fast ein Zehntel, was nur selten unter der Bruchgrenze liegen wird. Bei $P = 1{,}05\, P_\varkappa$ ist y_m rund $0{,}2\, l$ usw. Diese Zahlen erklären zur Genüge, warum ein auf Druck beanspruchter Stab fast immer sofort bricht, wenn die Knickgrenze überschritten wird.

Will man — was freilich praktisch seltener verlangt werden wird — die Größe der Ausbiegung nach Ueberschreitung der zweiten oder einer höheren Knicklast kennen, so braucht man nur $2\pi/l$, $3\pi/l$ .... für $\varkappa_0$ einzuführen und im übrigen den gleichen Rechnungsgang zu verfolgen [2]).

Unsere Gl. (8) lehrt auch in Verbindung mit (6), in welchem Sinn der ausgebogene Stab von der reinen Sinusform abweicht. Das negative Vorzeichen von c_1 besagt, daß die Ausbiegung an den Enden etwas geringer, in der Mitte etwas stärker wird, als bei der einfachen Sinuslinie. Die Abweichungen sind aber außerordentlich klein: Bei $c = 0{,}2\, l$ wird c_1 ungefähr $0{,}006\, c$, d. h. die Amplitude des Zusatzgliedes erreicht nicht einmal 1 vH der gesamten Ausbiegung.

Nebenbei bemerkt, ist der hier verwendete Integrationsgedanke auch brauchbar bei Behandlung der Differentialgleichung des mathematischen Pendels, die ja formal mit der des gebogenen Stabes übereinstimmt.

Mises. 375

Zur Steuermathematik. Im Anschluß an die Ausführungen von R. v. Mises im ersten Heft des 1. Bandes dieser Zeitschrift seien mir folgende Bemerkungen gestattet.

Stellen wir uns die Höhe einer Steuer oder Abgabe in einem Koordinatensystem dar, bei dem der Wert des Steuergegenstandes als unabhängige Veränderliche auf der Abszissenachse und der Abgabenbetrag als Ordinate eingetragen wird, so beginnen fast alle bisherigen Tarife mit einem unregelmäßigen vielwinkeligen Zickzack, und schließen mit einer schräg nach rechts aufwärts gehenden geraden Linie, deren ideelle linke Verlängerung die Abszissenachse entweder rechts oder links vom Nullpunkt schneidet. Schneidet sie links vom Nullpunkt, was bei Gebühren der Fall zu sein pflegt, so heißt das, daß die Gebühr einen festen Prozentsatz zuzüglich einer festen Summe ausmacht, wie bei den Anwaltsgebühren nach der Gebührenordnung von 1879 die höheren Gebühren $^1/_{10}$ vH + 119 ℳ betragen. Wenn aber der Durchschnitt rechts vom Nullpunkt stattfindet, was bei Steuern die Regel ist, so heißt das, daß die Steuer einen festen Prozentsatz abzüglich eines festen Betrages ausmacht. Es wäre auch denkbar, daß die ideelle linke

1) **Zu diesem Ergebnis kann man auch gelangen, indem man den Integrationsansatz in der gewöhnlichen Form macht und dann, statt elliptische Funktionen einzuführen, das erste Glied einer Reihenentwicklung benutzt. Das Ergebnis einer derartigen Rechnung, das sich bei H. Lorenz. Technische Elastizitätslehre, München 1913, S. 318 findet, ist jedoch nicht richtig.**

2) **Vergl. den demnächst erscheinenden ersten Band von Ph. Frank und R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Braunschweig (Vieweg), S. 377. (7. Aufl. von Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen.)**

Verlängerung die Abszissenachse gerade in dem Nullpunkt schnitte, d. h. daß die Abgabe in einen festen Prozentsatz ausliefe; ob das vorkommt, weiß ich nicht, wohl aber, daß früher ein absoluter Höchstbetrag vorkam, der dann durch eine gerade, zur Abszissenachse parallele Linie auszudrücken war. Alle diese Tarife werden ihrem Zwecke einer dauernden Steigerung oder Verminderung des Abgabenprozentsatzes nicht gerecht. Dieser kann nicht durch ein mehr oder weniger regellos beginnendes und regelwidrig endendes Zickzack erreicht werden, sondern nur durch eine ständig gekrümmte Linie, die in ihrem ganzen Verlauf einer einheitlichen Gleichung entspricht, u. zw. einer Gleichung wenigstens vom zweiten Grade.

Für die Gebühren ist die einfachste zulässige Gleichung, die der allgemeinen Anforderung genügt, die der gewöhnlichen Parabel

$$y^2 = x \cdot p, \qquad y = \sqrt{p \cdot x},$$

wobei p in der Zeichnung eine bestimmte Maßeinheit, in der Wirklichkeit eine bestimmte Geldeinheit (Mark, Tausend Mark, Million Mark) je nach Befinden bedeutet. So habe ich schon lange Zeit vor der gegenwärtigen Wertentwicklung vorgeschlagen, die Anwaltsgebühren gleich der Quadratwurzel des Wertes zu bemessen; das ergäbe im Verhältnis zu den Gebühren nach der Gebührenordnung von 1879 für die mittleren, üblichen Werte eine erträgliche Erhöhung, und für die höchsten, seltenen bis unwahrscheinlichsten Werte eine immer zunehmende Ermäßigung.

Natürlich ist die Parabel zweiten Grades nicht die einzige in Betracht kommende Kurve, was sich schon daraus ergibt, daß eine Gebühr doppelt so hoch sein kann, als die andere, ohne daß die Werteinheit p geändert werden darf. Auch kann der Gesetzgeber wollen, daß eine Gebühr stärker fällt als die andere, wie z. B. die Gerichtsgebühren und die Anwaltsgebühren dieselben Abstufungen und dieselbe Werteinheit hatten, aber die Gerichtskosten in $^1/_2$ vH + 40 ℳ, die Anwaltsgebühren in $^1/_{10}$ vH + 119 ℳ ausliefen. Man wird für Gebühren etwa eine Parabel höheren Grades in der Form $y^{a+n} = x^a \cdot p$ annehmen.

Es brauchen aber die Achsen der Parabel durchaus nicht mit den Koordinatenachsen zusammenzufallen, sondern können einen beliebigen Winkel mit ihnen bilden. Notwendig ist nur, daß die Kurve die Abszissenachse in dem Nullpunkt schneidet, und einen Sinn hat die Kurve nur soweit sie in dem ersten Quadranten verläuft. Wenn nachträglich eine Geldentwertung oder Rückaufwertung eintritt, so ist die Größe p zu ändern.

Für Steuern würde ich eine Kurve wählen, die eine Asymptote hat, also ein Hyperbel, aber gerade umgekehrt wie die beiden Hyperbeln, die R. v. Mises aus einem Teil des Einkommensteuertarifs entwickelt und in seiner Mitteilung angegeben hat. Bei der dort entwickelten Formel kann die Größe s/x nie über 0,6 steigen, aber, so weit ich sehe, auch nie unter 0,09444 . . . fallen. Die Freigrenze für die kleinsten Beträge ist also nicht aus der Kurve zu gewinnen, sondern dadurch, daß man sie unterbricht, also zu dem ersten noch einen zweiten Grundsatz einführt, der den ersten aufhebt. Eine einheitliche Kurve erhält man nur, wenn man eine nach unten konkave Kurve wählt, also eine Hyperbel, deren große Achse mit der Abszissenachse zusammenfällt oder einen spitzen Winkel bildet, und die die Abszissenachse an der Stelle schneidet, die als Freigrenze für kleinste Steuerwerte vorgesehen ist. Der nicht zu überschreitende Höchstprozentsatz wird dargestellt durch die Tangens des Winkels, den die Asymptote der Hyperbel mit der Abszissenachse bildet. Bei der Bildung der Hyperbelgleichung in der Normalform

$$x^2 \,.\, b^2 - y^2 \,.\, a^2 = a^2 \,.\, b^2$$

ist $b = a \,.\, \mathrm{tg}\, w$ zu setzen, wobei w den Winkel zwischen der Asymptote und der großen Achse der Hyperbel bedeutet. Wenn dann die Währungsverhältnisse sich ändern, so braucht bloß die Größe a geändert zu werden, alles übrige bleibt bestehen. Wenn die Hyperbelachse mit der Abszissenachse zusammenfällt, so bildet a die Freigrenze für kleinste Werte, andernfalls wird die Freigrenze durch den Punkt bezeichnet, wo der Hyperbelbogen die Abszissenachse schneidet.

Für den praktischen Gebrauch muß die Kurve in ein System von geraden Linien umgewandelt werden. Dafür gibt es vier Möglichkeiten oder Formen, von denen R. v. Mises nur die eine berücksichtigt hat. Man unterscheidet zunächst zwischen der Durchrechnung und der Anstoß-Staffelung (Durchstaffelung), und jede von beiden kann auf Prozente oder auf feste Beträge gestellt sein.

Die Durchstaffelung nach Prozenten ist die, welche R. v. Mises vorgelegen hat, sie lautet z. B.:

von den	ersten	1000 ℳ	10 vH,	
»	» nächsten	1000 »	11 »	, usw.

Die Durchstaffelung wird zeichnerisch durch ein Polygon dargestellt, bei dem es wohl auch genügen würde, wenn einfach je zwei Punkte des Bogens durch eine gerade Linie (Sehne) verbunden werden.

Die wirklich zu erhebende Abgabe beträgt

bei 1000 ℳ	100 ℳ,	
» 1100 »	111 »,	
» 1200 »	122 »,	
» 1300 »	133 »,	usw.

es gibt also jedesmal eine gerade Strecke, deren Endpunkte den Bogen an den bezeichneten Stellen schneiden.

Die Durchrechnung nach Prozenten könnte etwa lauten:

von Beträgen	bis	1000 ℳ	10	vH,
» »	über 1000 bis	2000 »	$10^1/_2$	»,
» »	» 2000 »	3000 »	11	»,

usw.

Diese Durchrechnung wäre zu zeichnen als ein treppenartiger Linienzug mit schrägen

Stufen. Die wirklich zu erhebende Abgabe beträgt

bei	1000 ℳ	100,00 ℳ,
»	1001 »	105,105 »,
»	1002 »	105,21 », usw.

Durch das sprunghafte Aufsteigen der Prozentsätze an den Grenzstellen entstehen gewisse Härten, zu deren Ausgleich gelegentlich bestimmt wird, daß der Mehrbetrag der Abgabe nur soweit erhoben wird, wie er aus der Hälfte des Mehrwertes des Steuergegenstandes gedeckt werden kann. Die Abgabe würde also betragen:

bei	1000 ℳ	100,00 ℳ,		
»	1001 »	100,50 »,	statt	105,105 ℳ,
»	1002 »	101 »,	»	105,210 »,
»	1012 »	106,00 »,	»	106,26 »,
»	1013 »			106,365 ».

Diesen Ausgleich zeichnerisch darzulegen lohnt sich wohl nicht.

Die Durchstaffelung nach festen Beträgen würde z. B. lauten:

von den angefangenen	ersten	1000 ℳ	100 ℳ,
» »	zweiten	1000 »	110 »,

usw.

Die Durchrechnung auf feste Beträge würde lauten z. B.:

bei Beträgen	bis	1000 ℳ	100 ℳ,
» »	über	1000 bis 2000 »	210 »,

usw.

Beides kommt sachlich auf dasselbe hinaus, verschieden ist nur der sprachliche Ausdruck. Die Durchrechnung ist für Tabellen geeigneter. Die zeichnerische Darstellung gibt ein treppenartiges Gebilde mit Stufen, die der Abszissenachse parallel gehen.

Ich glaube aber noch betonen zu sollen: die Anschließung der Staffelung an eine einfache **mathematisch definierte Kurve ist Aufgabe der gesetzgeberischen Gerechtigkeit. Die Umwand**lung der Kurve in ein Vieleck oder Zickzack und die Ausarbeitung der für den Gebrauch dienlichen Tabellen ist nur Sache der Verwaltungszweckmäßigkeit, weil die hier möglichen Unebenheiten immer nur kleine und Grenzbeträge betreffen können, und kleine Störungen doch nicht ganz zu vermeiden sind.

Karl Friedrichs, Ilmenau. 333

Vektorielle Herleitung der Frenetschen Formeln. W. Blaschke gab in der Math. Zeitschr. 6 (1920) eine Herleitung der Frenetschen Formeln für den n-dimensionalen Riemannschen Raum, indem er aus dem Tangentenvektor durch einen Differentiationsprozeß noch $(n-1)$ Vektoren ableitet, das so erhaltene n-Bein dem E. Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren unterwirft, die Vektoren normiert und schließlich die Ableitungen der orthogonalen Einheitsvektoren nach der Bogenlänge aus den Einheitsvektoren kombiniert.

Für den Euklidischen Raum hat man den Vorteil, durch geometrische Betrachtungen sofort die Einheitsvektoren angeben zu können. **Sei $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(t)$ der Ortsvektor der Punkte einer Raumkurve als Funktion eines Parameters t. Durch Differentiation nach t gehen daraus die Vektoren $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$, $\mathfrak{r}'''$ hervor. An deren Stelle betrachten** wir ein Tripel paarweis orthogonaler Vektoren $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$. Wir wählen $\mathfrak{r}_1=\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}_2$ komplanar mit $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r}''$, dann ist $\mathfrak{r}_3=\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''$, mithin $\mathfrak{r}_2=(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\times\mathfrak{r}'$.

Normiert:

$$\overline{\mathfrak{r}}_1=\frac{\mathfrak{r}'}{\sqrt{\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'}};\quad \overline{\mathfrak{r}}_2=\frac{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\times\mathfrak{r}'}{\sqrt{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}\sqrt{\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'}},$$

$$\overline{\mathfrak{r}}_3=\frac{\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''}{\sqrt{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}}.$$

$\overline{\mathfrak{r}}_1$, $\overline{\mathfrak{r}}_3$ **sind offensichtlich Einheitsvektoren; $\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''$ und $\mathfrak{r}'$ bestimmen ein Rechteck, dessen Inhalt $\sqrt{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}\sqrt{\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'}$, also ist auch $\overline{\mathfrak{r}}_2$ ein** Einheitsvektor.

Die Ableitungen nach der Bogenlänge s werden gebildet nach der Vorschrift:

$$\frac{d}{ds}=\frac{d}{dt}:\frac{|d\mathfrak{r}|}{dt}=\frac{d}{\sqrt{\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'}\,dt}.$$

Hiernach ergibt sich:

$$\frac{d\overline{\mathfrak{r}}_1}{ds}=\frac{\mathfrak{r}''}{\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'}-\frac{\mathfrak{r}'(\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'')}{(\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}')^2}=\frac{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\times\mathfrak{r}'}{(\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}')^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}}{\sqrt{\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'}^{3}}\,\overline{\mathfrak{r}}_2$$

und ähnlich

$$\frac{d\overline{\mathfrak{r}}_3}{ds}=\frac{((\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\times(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'''))\times(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}{\sqrt{\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'}\sqrt{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}^{3}}$$

$$=\frac{[\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''\mathfrak{r}''']\,\mathfrak{r}'\times(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}{\sqrt{\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'}\sqrt{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}^{3}}$$

$$=-\frac{[\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''\mathfrak{r}'']}{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}\,\overline{\mathfrak{r}}_2.$$

Setzt man nun

$$\frac{\sqrt{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}}{\sqrt{\mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}'}^{3}}=\varkappa,\quad \frac{[\mathfrak{r}'\mathfrak{r}''\mathfrak{r}''']}{(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')\cdot(\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'')}=\tau\quad (*),$$

so folgt

$$\frac{d\overline{\mathfrak{r}}_2}{ds}=\frac{d(\overline{\mathfrak{r}}_3\times\overline{\mathfrak{r}}_1)}{ds}=\varkappa\overline{\mathfrak{r}}_3\times\overline{\mathfrak{r}}_2-\tau\overline{\mathfrak{r}}_2\times\overline{\mathfrak{r}}_1=-\varkappa\overline{\mathfrak{r}}_1+\tau\overline{\mathfrak{r}}_3.$$

Damit hat man die Frenetschen Formeln

$$\frac{d\overline{\mathfrak{r}}_1}{ds}=\varkappa\overline{\mathfrak{r}}_2$$

$$\frac{d\overline{\mathfrak{r}}_2}{ds}=-\varkappa\overline{\mathfrak{r}}_1+\tau\overline{\mathfrak{r}}_3$$

$$\frac{d\overline{\mathfrak{r}}_3}{ds}=-\tau\overline{\mathfrak{r}}_2$$

in der von vornherein angebbaren Gestalt (s. Blaschke l. c. und die dort aufgeführten Arbeiten von Kowalewski), ferner in den Formeln (*) die Ausdrücke für die beiden Invarianten der Kurve für einen beliebigen Parameter. **Die geometrische Bedeutung von $\varkappa$ und** τ als Länge des Bogenelements des sphärischen Tangenten- bezw. Binormalenbildes, dividiert durch ds, entnimmt man nun leicht den Frenetschen Formeln.

Math. Seminar Dresden, 9. Juli 1923.

F. Müller. 320

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die Sortiment-Abteilung des VDI-Verlages, Berlin SW 19, Beuthstraße 7, zu beziehen.)

Prof. Dr. RICHARD FUCHS in Berlin-Halensee und Prof. Dr. LUDWIG HOPF in Aachen. Aerodynamik. Mit 285 Abbildungen im Text. Handbuch der Flugzeugkunde Band II. Unter Mitwirkung des Reichsamtes für Luft- und Kraftfahrwesen herausgegeben von F. Wagenführ, Oberstleutnant a. D., vormals Major und Kommandeur der Flugzeugmeisterei. Verlag von Richard Carl Schmidt & Co. Berlin 1922. VIII + 466.

In der Reihe der Werke, die von der ehemaligen Inspektion der Fliegertruppen herausgegeben werden, ist die umfassende Darstellung der flugtechnischen Aerodynamik von Fuchs und Hopf mit Recht warm begrüßt worden. Namentlich der letztere der beiden Verf. hat hervorragenden Anteil an der Durchführung der wissenschaftlichen Aufgaben innerhalb der Inspektion während des Krieges genommen. Es mag gleich vorausgeschickt werden, daß das Buch im großen Ganzen die Aufgabe gut erfüllt, dem theoretisch hinreichend gebildeten Ingenieur die Kenntnis der für die Flugzeugkonstruktion erforderlichen aerodynamischen Grundbegriffe zu vermitteln.

Nach einer kurzen Einleitung, die als »Quellen aerodynamischer Erkenntnis« Modellversuche, Versuche im wirklichen Fluge und theoretische Ueberlegungen bespricht, folgen die beiden Hauptteile, von denen der erste, »Die Luftkräfte« überschriebene, von R. Fuchs verfaßt ist, der zweite über »Die Bewegung des Flugzeugs« wie auch die Einleitung in der endgültigen Fassung von L. Hopf herrührt. Die Ausführungen des ersten Teiles beginnen mit einer Wiedergabe der Elemente der theoretischen Hydromechanik, namentlich der Theorie der zweidimensionalen wirbelfreien Bewegung. Die Darstellung ist ziemlich konventionell gehalten und erweckt stellenweise den Eindruck, daß der Verf. nicht sehr über dem Gegenstande steht. Dasselbe gilt für die längeren Ausführungen über die zweidimensionale Tragflügeltheorie, die sich wohl übersichtlicher und klarer hätte faßen lassen. Bei der Wiedergabe der im wesentlichen von Prantl herrührenden Theorie der Tragflügel von endlicher Breite und der daran schließenden Theorie des Widerstandes muß man den Verfassern zugute halten, daß sich dieses Gebiet noch schwer systematisch und abgerundet darstellen läßt. Immerhin wäre eine etwas kritischere Auswahl des Stoffes und eine straffere Zusammenfassung der bisherigen tatsächlichen Ergebnisse im Interesse gerade derjenigen Leser gelegen, die es auf praktische Anwendungen abgesehen haben. So wird der Konstrukteur nach all den theoretischen Ausführungen kaum aus dem Buche entnehmen können, wie man nun in einem konkreten Fall den indizierten Widerstand eines Ein- oder Zweideckers zu rechnen hat. Die ausführlichen Mitteilungen über Messungs- und Versuchsergebnisse, mit denen der erste Teil schließt, knüpfen naturgemäß in der Hauptsache an die Veröffentlichungen der Göttinger Versuchsanstalt an und enthalten alles Wesentliche von dem, was bis zur Abfassung des Buches in dieser Richtung bekannt war.

Der zweite Teil beginnt mit einer Diskussion des Kräftegleichgewichts im geraden gleichförmigen Flug. Auch hier wird man, wenn auch die Darstellung dem ersten Teil gegenüber den Vorzug größerer Straffheit besitzt, die Mitteilung eines konkreten Rechnungsganges vermissen, der doch dem Konstrukteur die Grundlage für die Konstruktion einer neuen Flugzeugtype liefern muß. Teilweise hängt dieser Mangel mit dem Umstand zusammen, daß die Verfasser, wohl mit Rücksicht auf die anderen Bände, die in dieser Reihe noch erscheinen sollen, die Theorie der Luftschraube ganz außer Betracht gelassen haben. Anerkennend hervorzuheben sind hier die reichhaltigen Zahlenangaben, die in einzelnen durchgeführten Beispielen verarbeitet werden.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit dem sogenannten Momentengleichgewicht im gleichförmigen Flug, also mit der statischen Theorie der Längsstabilität. Hier wäre der Zusammenhang mit den im ersten Teil abgeleiteten Gesetzen der Druckpunktwanderung mehr zu berücksichtigen gewesen. Schließlich folgen zwei Kapitel, die im wesentlichen der Untersuchung der Längs- und Querstabilität des Flugzeuges gewidmet sind. Die Ergebnisse gehen nicht über das hinaus, was aus der Zeitschriftenliteratur (zu der L. Hopf wertvolle Beiträge geliefert hat) bekannt ist. Daß man hier noch nicht zu befriedigenden Resultaten gelangt ist, wird man nicht den Verfassern des Lehrbuches zum Vorwurf machen dürfen.

Im Ganzen mag nochmals hervorgehoben werden, daß die »Aerodynamik« von Fuchs und Hopf eine sachgemäße und gut lesbare Zusammenfassung des gesamten auf diesem Gebiet vorhandenen Materials bildet und somit als Handbuch für den Flugzeugkonstrukteur wie auch als Einführung in die flugtechnischen Probleme dem Theoretiker empfohlen werden kann. Mises. 438

Prof. Dr.-Ing. OTTO FÖPPL, Braunschweig, Technische Hochschule. Grundzüge der Technischen Schwingungslehre. Mit 106 Abbildungen im Text. Verlag von Julius Springer, Berlin 1923. VI + 151 S., 4 Goldmark.

Eine Darstellung der Schwingungslehre der Mechanik, angepaßt den Bedürfnissen technisch orientierter Leser, findet sich in dem bekannten gleichbetitelten Buche von W. Hort. Das vorliegende Buch verfolgt ähnliche Tendenzen in engerem Umfang, geht aber in der

Auswahl der Beispiele manchmal auch über das erstere hinaus. Es wendet sich nicht an solche Leser, denen eine systematische, auf Axiome und möglichst einfache Erfahrungstatsachen gegründete Darstellung der Mechanik Bedürfnis ist. Wohl aber wird es solchen technischen Studierenden Anregung bieten, denen mehr daran liegt, sich bei jeder einzelnen Aufgabe ein gewisses anschauliches Bild zu konstruieren, das die Behandlung erleichtert. In diesem Sinne seien insbesondere genannt die Kapitel über mehrgliedrige Schwingungsanordnungen, sowie die Schwingungen von Balken mit veränderlichem Querschnitt und die Schwingungen des hängenden und belasteten Seiles. Auch die übrigen Kapitel, die eingliedrige Schwingungsanordnungen, Wellenbewegungen, erzwungene und gekoppelte Schwingungen, umlaufende Wellen, Schwingungsfestigkeit und Massenausgleich behandeln, haben ähnlichen Charakter.

In einem letzten Kapitel, das außerhalb des eigentlichen Zusammenhanges des Buches steht, teilt der Verfasser seine eigenen Bilder von den Grundvorstellungen der modernen Gravitationstheorie mit. F. Noether. 409

Dr. E. **SCHNEIDER**, Mathematische Schwingungslehre. **Berlin 1924, Springer. 194 S. mit 49 Abb. Preis G. M. 8,40, geb. 9,15.**

Die Lehren über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die in dem vorliegenden Buch reproduziert werden, entsprechen in ihrem Umfang ungefähr dem, was in den mathematischen Vorlesungen an technischen Hochschulen über dieses Gebiet vorgetragen wird. Eine starke Spezialisierung in der Behandlung der Sätze und Beispiele macht aber viele Wiederholungen unvermeidlich und verbreitert die Darstellung. Für Studierende scheint mir das Buch wenig geeignet; dazu werden die vorgetragenen Ansätze zu kategorisch, ohne Betonung des gedanklichen Zusammenhangs, mitgeteilt. Eher mag es vielleicht als Nachschlagebuch gelegentlich Verwendung finden.

F. Noether. 410

FERDINAND **WITTENBAUER**, Professor an der Technischen Hochschule in Graz. Graphische Dynamik. Ein Lehrbuch für Studierende und Ingenieure. Mit zahlreichen Anwendungen und Aufgaben. Mit 745 Abb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1923. XVI., 797 S.

Seit in der Technik, hauptsächlich durch das Verdienst von Culmann, Mohr und Müller-Breslau, die graphische Statik zu ausgedehnter Anwendung gelangt ist, hören die Versuche nicht auf, auch eine graphische Dynamik zu begründen und ihr Eingang in die Praxis der Konstruktionsingenieure zu schaffen. Bedenkt man aber, wie sehr verschieden die Probleme hier und dort liegen, so wird man von vornherein erkennen, daß solchen Versuchen nur in sehr beschränktem Maße Erfolg beschieden sein kann. In der Statik handelt es sich fast ausschließlich um die Lösung einer Kette von linearen algebraischen Gleichungen; da ist zumeist ein zeichnerisches Verfahren der Rechnung überlegen, denn es ist viel leichter, einen Streckenzug aus fünf oder sechs geraden Linien auf dem Papier zu zeichnen, als die Koeffizienten in ebensoviel linearen Gleichungen zu berechnen aus der Forderung, daß die Linien in bestimmter Weise aneinanderschließen sollen od. dergl. In der Dynamik besteht das Problem, mathematisch gesprochen, in der Integration eines Systems von Differentialgleichungen, in denen die unabhängig Veränderliche die Zeit ist. Also hätte man bei einer graphischen Dynamik mit zeichnerischen Integrationsverfahren vor allem andern zu tun.

Nicht in dieser Weise wird die Aufgabe der graphischen Dynamik von Wittenbauer (ähnlich wie von seinem Vorgänger R. Pröll 1874) angefaßt. Auch Wittenbauer formuliert die Absicht seines Buches dahin: »Es will die graphische Dynamik in derselben Weise in die Ingenieurkreise einbürgern, wie es der graphischen Statik seit geraumer Zeit gelungen ist«. Darüber hinaus will Wittenbauer zeigen »wie man auch auf dem Gebiete der theoretischen Dynamik auf einfache Weise und fast ohne jede Rechnung Aufgaben lösen kann«. Was geschieht nun zur Verwirklichung dieses Zieles? Ungefähr drei Viertel des umfangreichen Werkes sind der Untersuchung des »augenblicklichen Bewegungszustandes« gewidmet. Es werden die bekannten Sätze und Verfahren der kinematischen Geometrie und der Kinematik, dann der Massengeometrie (Theorie der Schwerpunkte und Trägheitsmomente), erst für einen einzelnen Punkt, dann für eine starre Scheibe, endlich für ein System von Scheiben entwickelt. Ueber den Bereich der ebenen Bewegung hinaus greifen die Untersuchungen fast niemals. Mit eingeschlossen in diesen Abschnitt wird auch die Behandlung der äußeren und inneren Kräfte, die an dem System angreifen. In der Sprache der rationellen Mechanik müßte man sagen, daß dieser ganze, etwa 550 S. umfassende, Teil des Buches sich mit der Aufstellung der Bewegungsgleichungen befaßt. Dabei ist jedoch keineswegs von irgend welchen physikalischen Schwierigkeiten des Ansatzes die Rede, denn es werden die Körper grundsätzlich als geometrisch starr betrachtet, so daß ausschließlich die Bewegungsgleichungen des starren Körpers zur Anwendung kommen, und auch die Kräfte werden nicht etwa nach ihrer physikalischen Herkunft untersucht. Von einer Lösung einer eigentlichen dynamischen Aufgabe ist somit in diesem Teile des Buches nichts zu finden.

Erst in den letzten 200 S. kommt »die Bewegung in der Zeit« zur Sprache. Was aber hier an Aufgaben tatsächlich gelöst wird, geht kaum über das Elementarste hinaus. Punkt-Bewegung unter Verwendung von Weg-Zeit-Kurven usf., reine Translationsbewegung ebener Scheiben, Dauerdrehung eines Körpers um eine feste Achse, endlich etwas aus der Dy-

namik des zwangläufigen Getriebes. Das ganze Buch gipfelt etwa in einer vertieften Methode der Schwungradberechnung, die, an das Radingersche zeichnerische Verfahren anknüpfend, dessen Zusammenhang mit der analytischen Mechanik herstellt, wie dies schon vor fünf Jahrzehnten ungefähr bei Grashof geschehen ist. Irgend welche schwierigere Probleme der technischen Dynamik, wie das Problem der Geschwindigkeitsregler, das Problem der Kreiselwirkung, der Schiffsschwingungen u. dergl. werden in dem Buche kaum berührt, keinesfalls in erheblichem Maße gefördert.

Diese Bemerkungen, die den Inhalt des Wittenbauerschen Buches charakterisieren, und die Tragweite dessen, was hier als graphische Dynamik bezeichnet wird, richtig einzuschätzen bestrebt sind, wollen auf der andern Seite nicht als eine ablehnende Kritik des von dem Buch tatsächlich Gebotenen aufgefaßt werden. Wittenbauer hat fast sein ganzes Leben hindurch an diesem seinem Lieblingsgegenstande gearbeitet. Er hat, wie jeder Leser leicht erkennen wird, mit viel Liebe und viel Sachkenntnis die Einzelheiten der von ihm benutzten geometrischen Konstruktionsverfahren ausgestaltet und sie in eleganter Form darzustellen gewußt. Jeder, der für schöne konstruktive Verfahren Verständnis besitzt, wird mit Freude das Buch durchsehen, das in seiner reichen Fülle sorgfältigst ausgeführter Zeichnungen und ebenso sorgfältig gehaltener Erklärungen ein schönes Denkmal für den kurz vor der Fertigstellung verstorbenen Verfasser bildet. Auch wird man das eine oder andere daraus gerne dem Gedächtnis einprägen, um es gelegentlich bei der Lösung einer mechanischen Aufgabe zu verwenden.

Mises. 316

Dr. techn. R. SANZIN, Versuchsergebnisse mit Dampflokomotiven. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Heft 251. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure. Berlin 1921. 37 S.

Der leider kürzlich verstorbene Verfasser hat an 20 verschiedenen österreichischen Lokomotivbauarten systematische Versuche durchgeführt und deren Ergebnisse hier dargestellt. In einem Schaubild werden in sehr übersichtlicher Weise die Grenzen der Zugkraft, auf die indizierte Maschinenleistung bezogen, für verschiedene Fahrgeschwindigkeiten zusammengestellt, insbesondere wird auf die »Reibungsgeschwindigkeit« verwiesen, bei der noch ohne Ueberlastung des Dampfkessels die größte Reibungszugkraft ausgenützt werden kann. Dieses Diagramm gibt auch Aufschluß über die günstigen Betriebsbedingungen für verschiedene Verwendungen der betreffenden Lokomotive und einen klaren Einblick in die Verhältnisse bei verschiedenen Fahrgeschwindigkeiten und Zylinderfüllungen. Allerdings ist es nur zu ermitteln, wenn entsprechende Erfahrungen über die Leistungen der Dampfmaschinen bei verschiedenen Füllungen und Umdrehungszahlen und insbesondere über die mögliche dauernde Dampflieferung der Kessel und der ihr entsprechenden Zugkraft zu Gebote stehen.

Umso dankenswerter ist es, hier eine so große Anzahl von Versuchen so deutlich und einheitlich vorzufinden, deren Ergebnisse so gleichmäßig gewonnen und ausgewertet sind, wie es in dieser mühsamen Arbeit der Fall ist. Aehnliche Brennstoffe, möglichst gleichartige Feuerbedienung u. a. gehören zu den Bedingungen des Vergleiches.

Die Ergebnisse sind in Tafeln und Schaulinien übersichtlich dargestellt und gestatten neben einem einwandfreien Vergleich der untersuchten Maschinen wohl auch unmittelbare Verwendung bei Neubauten.

Prag. K. Körner. 317

Dr. techn. F. HEINL, Untersuchungen an Dampfstrahlapparaten. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens Heft 256. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure. Berlin 1922. 23 S., 1 Tafel.

Die Arbeit hatte ein ganz spezielles Ziel, nämlich die Beantwortung der Frage, ob sich der Wasserumtrieb bei Warmwasserheizungen durch Dampfstrahlapparate durchführen läßt; es handelte sich also um ein beschränktes Versuchsgebiet, insbesondere um die Frage nach der mindesten Wassererwärmung und nach der Regelbarkeit einer solchen Anordnung.

Zur Untersuchung diente ein entsprechender Versuchsapparat mit den nötigen Meßeinrichtungen. Die der Beschreibung derselben folgenden theoretischen Betrachtungen, besonders des Mischungsvorganges, geben eine vorzügliche Vorstellung von demselben, obgleich die Darstellung stellenweise noch klarer und die Rechnungen übersichtlicher sein könnten. Während im allgemeinen bei der Mischung eine Drucksteigerung stattfindet, ist die Rechnung für gleichbleibenden Druck und die Voraussetzung durchgeführt, daß an der engsten Stelle der Druckdüse die Kondensation beendet ist.

Die Versuche beschränken sich auf solche Fälle, die den Verhältnissen bei der Warmwasserheizung am nächsten kommen und die Anwendbarkeit für solche Anlagen bei Hinzufügung einer zweiten, regelbaren Wärmequelle einwandfrei dartun. In der Tat sind mehrfache Ausführungen bekannt geworden, die nach diesem Gedanken ausgezeichnet arbeiten.

Prag. K. Körner. 318

Dipl.-Ing. P. STEPHAN, Regierungs-Baumeister, Professor. Die Technische Mechanik des Maschineningenieurs mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Vierter Band. Die Elastizität gerader Stäbe. Mit 225 Textfiguren. Verlag von Julius Springer. Berlin 1922. 249 S.

Wie die vorhergehenden Bände hat auch dieses Buch die Absicht, immer sogleich nach einer kurzen theoretischen Erklärung recht viele und eindringliche und dabei wirklich praktische Beispiele zu bringen. Die Erfahrung, daß auch gut unterrichtete Anfänger oft

Schwierigkeiten mit der Durchrechnung von Aufgaben finden, läßt dieses Bestreben als außerordentlich wertvoll erscheinen und es kann bei sorgfältiger Durchführung für den Unterricht Bedeutung haben. Wenn man sich jedoch mit kurzen allgemeinen Bemerkungen begnügen will, so müssen sie um so klarer und schärfer gefaßt sein, was in diesem Buch aber durchaus nicht der Fall ist. Auch ist eine Grundbedingung für diesen Plan, daß die Beispiele richtig gerechnet und daß die Rechnungsgrundlagen besonders deutlich hervorgehoben werden, sonst muß der Leser fortwährend stocken und vergeudet unnütze Zeit. Leider ist auch diese Forderung oft unerfüllt geblieben; neben manchen wirklich vorzüglichen und mit großer Sorgfalt behandelten Beispielen finden sich auch solche, die wenig Sinn und Wert haben oder Fehler aufweisen. Es ist in dieser Besprechung nicht gut möglich, Einzelheiten vorzubringen, allgemein kann nur wiederholt werden, daß die guten Ideen des Verfassers, die große Mühe, die er aufgewendet hat, und seine Literaturkenntnis gewiß anerkannt werden müssen, daß es aber doch vielfach an Klarheit und Richtigkeit der Rechnungen mangelt. Hoffentlich werden diese Mängel in Zukunft verbessert.

Prag. K. Körner. 455

Dr.-Ing. WALTHER **FISCHER,** Der Einfluß des Kühlwassermantels an Kompressions-Kältemaschinen. (Mitteilung aus dem Maschinenlaboratorium der Technischen Hochschule Danzig.) Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 244. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure. Berlin 1921. 78 S.

Die hier untersuchte Frage ist von praktischer Bedeutung, da der Wassermantel den Bau des Kompressors verwickelt macht und auch die Kühlwasserleitung unbequem ist. Da sich nun in manchen Fällen gezeigt hatte, daß der Kühlmantel sogar ungünstig wirkte, war man überhaupt über seinen Wert im Zweifel. Die ausführlichen und sehr sachgemäßen Versuche, die der Autor im Maschinenlaboratorium der technischen Hochschule in Danzig ausführen konnte, haben nun gezeigt, daß bei Ansaugen von überhitztem Dampf der Wassermantel vorteilhaft ist, daß hingegen bei nassem Dampf, dessen Verwendung übrigens merklich ungünstiger ist, der Erfolg zweifelhaft bleibt. Da während der Versuche die erwünschten Grenzzustände nicht erreicht werden konnten, mußten bei einzelnen Auswertungen Umrechnungen auf andere Umdrehungszahl und geänderte Dampfnässe des angesaugten Dampfes herangezogen werden, zu denen besondere Versuche über den zahlenmäßigen Einfluß dieser Größen notwendig waren, die ihrerseits wieder unmittelbar wertvolle Einblicke geben.

Die umfangreichen Arbeiten sind demnach als eine bedeutende Bereicherung für die Praxis anzusehen. K. Körner. 307

Dr.-Ing. ERICH **HENNE,** Beitrag zur Berechnung der Dampfturbinen auf zeichnerischer Grundlage. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 260. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure. Berlin 1922. 58 S., 3 Tafeln.

Auf Grund der von Loschge angegebenen Beziehung zwischen dem mittleren Verhältnis k_1 von Umfangsgeschwindigkeit und Eintrittsgeschwindigkeit des Dampfes in einer mehrstufigen Turbine und dem Verhältnis K zwischen der Summe der Quadrate der Umfangsgeschwindigkeiten und der Summe der adiabatischen Einzelwärmegefälle wird durch Verbindung mit den von Bánki und Stodola abgeleiteten Ausdrücken für die Wirkungsgrade η der Beschaufelung gefunden, daß dieser Wirkungsgrad und der Wert K bei gegebenen Widerstandsbeiwerten für das Leit- und Laufrad nur mehr von k_1 und dem Eintrittswinkel α_1 abhängen, so daß sich in dem Koordinatensystem (K, η) Kurven für gleichbleibende Werte von k_1 und α_1 einzeichnen lassen, deren Schnittpunkte die zugehörigen Werte von K und η ergeben. Da man in ähnlicher Weise auch Kurven für gleiche Werte der Verhältniszahlen zwischen Umfangsgeschwindigkeit und Meridiangeschwindigkeiten, ferner zwischen Umfangs- und Austrittsgeschwindigkeit und endlich für gleiche Austrittswinkel α_2 und relative Winkel β einzeichnen kann, gibt ein solcher Punkt in der genannten Tafel auch diese Größen der Geschwindigkeitsdreiecke an, so daß man ihre mittleren Werte ohne Aufzeichnung der Dreiecke selbst unmittelbar ablesen kann. Wie gezeigt wird, ist die Methode universell verwendbar, sowohl für Ueberdruckturbinen, als auch für Druckturbinen mit Trommeln oder Einzelrädern, so daß sie Aussicht auf praktische Verwendung besitzt, wozu allerdings die richtige Annahme der Verlustbeiwerte erforderlich ist. An einigen Beispielen wird die Durchführung der Berechnung erläutert und die Ergebnisse werden mit Ausführungen verglichen. Die Darstellung könnte vielleicht stellenweise einfacher und durchsichtiger sein, etwa bei der Herleitung der Gleichungen der oben genannten Kurven, die sich mit Zuhilfenahme der Geschwindigkeitsdreiecke leichter auseinander ergeben. K. Körner. 302

Dr. M. **RÜHLMANN,** weiland kgl Preuß. Geh. Regierungsrat und Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover und Dr. M. R. **RÜHLMANN,** Prof, Rektor des Königl. Realgymnasiums mit Höherer Landwirtschaftsschule zu Döbeln. Logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln. Zunächst für Techniker sowie für den Schulgebrauch und für praktische Rechner überhaupt. 16. Auflage. Julius Klinkhardt. Leipzig 1922. XL + 326.

Nächst den zahlreichen und am weitesten verbreiteten fünfstelligen Logarithmentafeln bilden sechsstellige Tafeln für den wissenschaftlichen, aber auch praktischen Rechner ein wichtiges Hilfsmittel. Am bekanntesten

und am meisten geschätzt sind wohl unter den letzteren die von C. Bremiker zuerst im Jahre 1852 (noch mit lateinischem Text!) veröffentlichten und in vielen Auflagen erneuerten Tafeln. Die vorliegenden Tafeln können auf ein noch höheres Alter zurückblicken, sind sie doch schon von dem verstorbenen Professor Moritz Rühlmann, dem Verfasser einer heute noch recht lesbaren Geschichte der technischen Mechanik, im Jahre 1837 zum ersten Male herausgegeben worden, wie er selbst bekennt, »nicht um seinen literarischen Ruf zu begründen, sondern seinen Schülern zu nützen«, und heute erlebt es seine 16. Auflage. Trotz seines beträchtlichen Umfanges von 326 S. vermöge seines eigenartigen Formates (11×16 qcm) ein recht handliches Tabellenwerk! Die auffälligste Eigentümlichkeit desselben ist die Tafel der Briggschen Logarithmen. Sie ist sozusagen zweistufig. Da den sechsstelligen Logarithmen vierstellige Numeri entsprechen, würden die Tafeldifferenzen am Beginn (N. 1000) mit 434 einsetzen, und da diese erst bei Num. 4348 zweistellig werden, so würde für beinahe die Hälfte aller Tafelwerte die immerhin beschwerliche Zwischenschaltung mit dreistelligen Tafeldifferenzen erforderlich sein. Diesen Nachteil meidet der Verfasser, indem er die vierstelligen Numeri nur von 1500 an laufen läßt und vorher die Numeri von 10000 bis 15009 fünfstellig setzt. Dadurch drückt er die T. D. für dieses Gebiet auf zweistellige herab und nur noch der fünfte Teil aller Logarithmen muß mit dreistelligen verhältnismäßig niedrigen Tafeldifferenzen (von 290 abwärts) interpoliert werden. Aehnlich hat er die Intervalle der Funktionsargumente in den Logarithmen der goniometrischen Funktionen, von 0 bis 3^0 auf $10''$ verkleinert; erst von 4^0 an folgen sich die Winkelwerte in Minutenabständen. Hier sind die T. D., wie auch sonst in guten Tafeln, gleich pro Winkelsekunde angesetzt. Die Interpolationstäfelchen sind nicht, wie häufig seitlich neben, sondern am Fuß jeder Seite untergebracht, was wohl die bessere Anordnung sein dürfte. An Stelle der Vermehrung negativer Kennziffern um 10 von negativen Logarithmen der trigonometrischen Funktionen in fast allen heute gebräuchlichen Tafeln sind die negativen Kennzahlen selbst durch überstrichene Ziffern angegeben. Mir selbst sind jene gefälschten Kennziffern schon während des Schulunterrichtes recht unsympathisch und lästig gewesen, so daß ich sie für mich nie gebraucht habe. Ich meine, daß sie lediglich ein typographisches Zugeständnis zum Nachteil des Benutzers gewesen sind, und hoffe, daß sie aus allen zukünftigen Logarithmentafeln dank dem durch Rühlmann gegebenen Muster verschwinden werden. Das Rechnen mit den überstrichenen Zahlen (das Minuszeichen überdacht die negative Zahl) nach Cauchy ist leicht erlernbar, bequemer und sicherer als die andere Art, namentlich, wenn ganze Reihen von trigonometrischen Logarithmen zu addieren oder zu subtrahieren sind, im übrigen von Kennern des numerischen Rechnens auch anderwärts (z. B. von Lüroth) empfohlen worden. Auch die natürlichen Werte der goniometrischen Funktionen sind in Tafel III vorhanden; hier ist aber, um Raum einzusparen, vielleicht zu stark zusammengedrängt worden. Die ersten übereinstimmenden Dezimalen sind nämlich an den Kopf jeder Spalte gestellt, und weil sie zwischen 0, 1, 2 Stellen schwanken, so stehen für dieselbe Funktion oft auf zwei gegenüberstehende Seiten entsprechend 6, 5, 4-stellige Dezimalen in der Spalte. Das Tafelbild wird dadurch recht ungleichförmig, unruhig und verleitet zu Irrtümern. Hier fehlen außerdem die Tafeldifferenzen mit ihren Schaltzahlen. Sonst sind noch vorhanden einige kleinere Tafeln wie die natürlichen Logarithmen der Zahlen von 1,00 bis 100 (Taf. VII), diese bis N. 10 um eine Einheit der zweiten Dezimale, dann um eine ganze Einheit springend, die Kreisbogenmaße der ganzzahligen Winkel von 0 bis 360^0, aller ganzen Minuten und Sekunden (Taf. IV), Verwandlung der Minuten und Sekunden in Dezimalbrüche des Grades (Taf. V) und ausführlicher Kreisumfang, Kreisinhalt, Quadrat, Kubus, Quadrat- und Kubikwurzel der ganzen Zahlen von 1 bis 1000. Man vermißt darunter die reziproken Werte. Dieses wertvolle Zahlenmaterial, das u. a. auch in die »Hütte« übergegangen ist, verdankt seinen Ursprung wohl dem vorzüglichen, leider vergriffenen Taschenbuch der Mathematik von W. Ligowski. Die Tafelgruppe VIII ist der barometrischen Höhenmessung »mit allen Schikanen« gewidmet.

Einen beträchtlichen Raum, nämlich 53 Seiten, nimmt dann die Mitteilung einfacher, erfahrungsmäßiger Zahlenwerte physikalischer, chemischer und astronomischer Natur ein. Recht ausführlich sind auch die Tafeln zur Zinseszins-Rentenrechnung nebst einer kleinen aus der preußischen Statistik stammenden »Mortalitätstafel« für männliches und weibliches Geschlecht. Dagegen sind, von einigen Festigkeits-, Reibungszahlen und spezifischen Gewichten — diese allerdings für zahlreiche Stoffe — abgesehen, keine den technischen Wissenschaften eigentümliche Zahlenwerte mitgeteilt, obgleich der Titel des Werkes ausdrücklich auf den Gebrauch »zunächst für Techniker« hinweist. Hier könnte in künftigen Auflagen, die dem nützlichen Buche weiter beschieden sein mögen, einmal gründlich Wandel geschaffen, die besonderen Bedürfnisse der Technik mehr berücksichtigt werden, dafür manches Andere, den Techniker weniger Berührende wegbleiben. Man kann nicht zween Herren dienen. Der Druck ist gut, Einband und Papier könnten für ein so stark benutztes Buch besser sein.

Jena. Winkelmann.

Dr. LOTHAR **SCHRUTKA**, o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. Zahlenrechnen. Sammlung Mathematisch-Physikalischer Lehrbücher. 20. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1923. X und 146 S.

Es gibt nicht allzuviele zusammenfassende Darstellungen des von Schrutka behandelten Gebietes. So uralt diese Fragen sind, muß man sich das, sei es für Unterricht, sei es für praktische Rechenarbeit Benötigte eben deshalb, weil es allzu elementar und allgemein bekannt erscheint, oft an den verschiedensten Stellen zusammensuchen. Es kommen vor allem neben dem reichhaltigen Enzyklopädieartikel von R. Mehmke »numerisches Rechnen«, I. Bd., S. 938 bis 1079, das schwer lesbare Buch von H. Bruns »Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens«, Leipzig 1903, das sehr gute Büchlein von P. Werkmeister »Praktisches Zahlenrechnen«, (Sammlung Göschen) Leipzig und Berlin 1921, und gewisse Teile aus H. v. Sandens »praktischer Analysis«, Handb. d. ang. Math., I. Teil, Leipzig und Berlin 1914, in Betracht. Neben all diesen zeichnet sich Schrutkas neues Buch, wenn man die engen Grenzen seiner Aufgabe berücksichtigt, durch eine gewisse Vielseitigkeit, ja oft Vollständigkeit des Gebotenen aus. Schrutka beschränkt sich von vornherein unter fast vollkommener Ausschaltung der Analysis auf das elementare Zahlenrechnen. Den breitesten Raum nimmt die Besprechung des Rechnens mit den vier Spezies ein, das mit allen Hilfsmitteln — Rechenmaschinen und Tabellen werden ausführlich besprochen[1]) —, auch besondern zum Teil minder bekannten Rechenvorteilen (Nepersche Rechenstäbchen, symmetrische Multiplikation, indische Netzmethode, Crelles Divisionsverfahren usw.) behandelt wird. Das »abgekürzte Rechnen« wird — auch hier manches minder bekannte — theoretisch und praktisch befriedigend dargestellt; geeignete Rechenproben werden an vielen Stellen angegeben. Mit gleicher Vollständigkeit wird auf Potenzieren und Wurzelziehen eingegangen, wo wieder nebeneinander die verschiedenen Möglichkeiten, direktes Rechnen nach dem oder jenem Schema — hier ist eine der wenigen Stellen, wo bei Besprechung der Newtonschen Näherungsmethode und der regula falsi auch einige Analysis einfließt — Rechnen mit Hilfe von Tafeln, von Maschinen besprochen werden. Für die rechnerische Behandlung von Polynomen wird das Hornersche Schema gebracht, auch in seiner Anwendung auf Auflösung algebraischer Gleichungen, auf das Ausziehen von höheren Wurzeln unter besonderer Berücksichtigung der Verwendung der Rechenmaschine. Schließlich, über das elementarste Gebiet hinaus, folgen zwei Artikel über Logarithmen, Winkelfunktionen und verwandte Funktionen. In ersterem sind die wichtigsten hierher gehörigen Tafelwerke genannt und soweit nötig erläutert; auf Tafeln der Antilogarithmen, auf verschiedene Interpolationsmethoden wird kurz eingegangen; die Additions- und Subtraktionslogarithmen werden eingeführt, ihre Tafeln erklärt. Aus dem Abschnitt über Winkelfunktionen sei etwa die für praktische Rechnung wichtige Auflösung kubischer Gleichungen mittels Winkelfunktionen hervorgehoben. Jeder Abschnitt bringt im Text reiche, zum Teil kritische Literaturangaben; ein ausführliches Literaturverzeichnis am Schlusse des Werkchens, das vor allem auch viele Originalarbeiten zitiert, sowie ein umfassendes Register sind — letzteres vor allem wohl auch dem praktischen Rechner — sehr willkommen, so daß im Ganzen das Buch praktisch wie auch theoretisch manch wertvollen Dienst leisten wird.

[1]) Rechenschieber wird beiseite gelassen, da darüber schon viele Darstellungen, auch eine vom Verf. selbst, existieren. Auch alle graphischen Verfahren fehlen.

H. Pollaczek-Geiringer. 358

Neue Bände der Sammlnng Göschen:

Nr. 72 und 876 Dr. KARL **DOEHLEMANN,** o. ö. Professor an der Technischen Hochschule München; Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung I, fünfte Auflage, mit 59 Figuren, 1922, 130 S.; II, fünfte Auflage, mit 55 Figuren, 1924, 138 S.

Nr. 57 Architekt HANS **FREYBERGER,** Zentralperspektive, neubearbeitet von Professor J. **VONDERLINN,** Gewerbeschulrat und Baugewerkschuldirektor a. D. Zweite verbesserte Auflage mit 132 Figuren, 1923, 148 S.

Nr. 508 und 871 Dr. OTTO **KNOPF,** a. o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. Wahrscheinlichkeitsrechnung I. 1923, 112 S.; II mit 10 Figuren im Text. 1923, 112 S.

Nr. 879 Dr. EMIL **FOERSTER,** Honorardozent an der Technischen Hochschule in Wien. Politische Arithmetik (Zinseszins-, Renten- und Anleiherechnung) mit 7 Figuren. 1924, 155 S.

Die kleinen mathematischen Lehrbücher der Sammlung Göschen geben ein gutes und sorgfältig gezeichnetes Bild von dem sichergestellten Bestand der einzelnen Wissenszweige. Die Verlagsbuchhandlung ist fortlaufend bemüht, die kleinen Werke noch zu verbessern und der neueren Entwicklung und den Bedürfnissen des Leserkreises, der sich wohl in der Hauptsache aus Studierenden zusammensetzt, anzupassen.

Die projektive Geometrie von Doehlemann ist in der neuen Auflage auf zwei Bände erweitert worden. Sie schließt jetzt auch die Polarentheorie und die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte ein und geht im übrigen bis zur Behandlung der Kegel- und Regelflächen 2. Ordnung. An den Grundsätzen der Darstellung, die auf völlige Reinheit der Methode zugunsten des leichteren Verständnisses verzichtet, ist nichts geändert worden.

Die Neubearbeitung der »Zentralperspektive« von Freyberger, die jetzt in der zweiten Auflage vorliegt, stellt ein brauchbares und ziemlich abgeschlossenes Lehrbuch der Elemente dar. Es ist ebenso wie die Doehle-

mannschen Bändchen mit sehr guten Zeichnungen ausgestattet. Besonders hervorhebenswert sind die zur Erläuterung der geometrischen Theorie dienenden zahlreichen Skizzen nach der Natur.

Die Knopfsche Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein getreues Abbild des in vieler Hinsicht sehr unbefriedigenden Standes dieser Disziplin. Alle Unklarheit und Unsicherheit in den Grundbegriffen und Definitionen tritt auch hier deutlich zutage. Doch hat der Verf. das Mögliche getan, um durch Ausführung konkreter Aufgaben und Beispiele den Leser mit dem praktischen Handwerkszeug der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut zu machen. Freilich hätte man bei vielen Aufgaben eine gründlichere Präzisierung der Voraussetzungen gewünscht.

Eine knappe Zusammenfassung der verschiedenen nicht sehr eng miteinander verknüpften Ueberlegungen, die man zur politischen Arithmetik rechnet, ist heute gewiß sehr erwünscht. Das Büchlein von Foerster erfüllt seine Aufgabe in gründlicher Weise. Die einzelnen Kapitel behandeln die einfache Zinsrechnung, Zinseszins, Renten, vorschüssige Zinsen, Schuldtilgung, Kurs und Rentabilität. Eine Anzahl von Tabellen, die am Ende beigefügt sind, erhöhen die Brauchbarkeit des Werkes, das sowohl den Studierenden wie auch Praktikern zweifellos gute Dienste leisten wird.

Mises. 419

F. M. **URBAN**, Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler. Verlag von B. G. Teubner. Leipzig, Berlin 1923. V + 274 S.

Der Verf. will, wie er in der Vorrede bemerkt, nicht ein eigentliches Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung geben und auch auf die Fragen der physikalischen Anwendungen usf. nur beiläufig eingehen. Sein Ziel ist hauptsächlich eine Klärung der Grundbegriffe und Grundtheoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ich kann nicht finden, daß er in irgend einer Richtung über das in zahlreichen älteren Veröffentlichungen Enthaltene hinausgegangen sei, noch weniger, daß es ihm gelungen wäre, irgend welche Klärung oder auch nur begriffliche Zusammenfassung zu finden. In ziemlich wenig miteinander zusammenhängenden Abschnitten wird über die Lehre vom »Zufall« und über die »Wahrscheinlichkeit« gehandelt. Die mathematische Mengenlehre kennt der Verf. wohl nur vom Hörensagen. Er definiert die Wahrscheinlichkeit als den Quotienten der Mächtigkeiten zweier Mengen! Dabei spielt ein schleierhafter Begriff der »Mengenbildung« eine gewisse Rolle. Welcher Art die begriffliche Klärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ist, mag man etwa aus dem folgenden Zitat entnehmen: »Gegen die Annahme der gleichen Möglichkeit der Fälle wird gewiß dann kein Grund sprechen, wenn wir hinsichtlich der fraglichen Ereignisse überhaupt keine Information besitzen. Vernünftigerweise wird man in diesem Falle aber auch keinen Wahrscheinlichkeitsansatz versuchen, sondern alle Spekulationen bis zum Eintreffen positiver Information verschieben.« In den späteren Kapiteln des Buches werden die einfachsten Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung ungefähr in der Art der älteren Lehrbücher, aber durchsetzt mit vielen dem Referenten unverständlichen logischen »Erklärungen« behandelt.

Mises. 440

NACHRICHTEN

Zur Neuordnung des höheren Schulwesens in Preußen. Die vor wenigen Monaten erschienene Denkschrift des Preußischen Unterrichtsministeriums über die Neuordnung des höheren Schulwesens[1]) hat eine überaus lebhafte Gegenbewegung ausgelöst, in der besonders stark mathematisch, naturwissenschaftlich und technisch gerichtete Kreise hervorgetreten sind[2]). Es wird daher nicht ohne Interesse sein, hier die wichtigsten der für uns in Frage kommenden Streitpunkte kurz zu besprechen.

Der konkreteste und am heftigsten verfochtene Einwand richtet sich gegen die von der Denkschrift vorgesehene Herabsetzung der wöchentlichen Zahl der Mathematikstunden in den Oberklassen des Gmnasiums von vier auf drei. Begründet wird diese Maßnahme in der Denkschrift durch die Forderung nach Entlastung und vor allem durch den prinzipiellen Gesichtspunkt der qualitativen Vereinheitlichung, wonach jeder Schulgattung die Pflege ihrer besonderen Eigenart, dem Gymnasium das vertiefte Studium der alten Sprachen, vorbehalten bleiben soll. Die Gegner gehen von der Tatsache aus, daß die Unterrichtserfolge schon jetzt sehr gering seien, und sie betonen hauptsächlich, daß die allgemeine Entwicklung der Gegenwart eher eine Vermehrung als eine Verminderung der Mathematikstunden hätte erwarten lassen. Die klassischen Philologen unterstüzen die Forderung der Mathematiker, weil sie befürchten, daß das Gymnasium seine bisherige Vorherrschaft unter den höheren Schulen verlieren könnte, wenn die Gestaltung des Lehrplanes die Unzufriedenheit allzuweiter Kreise hervorruft. Der Minister hat denn auch die Erfüllung der so nachdrück-

[1]) Die Neuordnung des preußischen höheren Schulwesens; Berlin, Weidmannsche Buchhandl. 1924.

[2]) Die meisten Gegenkundgebungen sind zusammengefaßt in: Das höhere Schulwesen, Stimmen gegen die Neuordnung .... nach der Denkschrift des .... Ministeriums .... Herausg. vom Deutsch. Verb. techn.-wiss. Vereine, VDI-Verlag, Berlin 1924.

lich erhobenen Forderung zum großen Teil schon zugesagt. Der Kampf wird in heftiger Form noch weiter geführt, teilweise unter maßlosen Uebertreibungen: Für keinen Mediziner, für keinen Kaufmann soll das Gymnasium mit der verminderten Mathematik-Stundenzahl mehr brauchbar sein. Die Zeitdauer für den Ergänzungsunterricht künftiger Studierender der technischen Hochschulen wird auf mindestens ein bis zwei Semester geschätzt (zum Ausgleich von vier Wochenstunden Schulunterricht eines Jahres!). Und in einer Denkschrift des Mathematischen Reichsverbandes heißt es: »Bei drei Wochenstunden bleibt nur die Wahl, entweder im rein Technischen stecken zu bleiben, was doch nur einen geringen Bildungswert hat und dem mathematischen Unterricht bei ungeeigneten Lehrern oft zu Unrecht den Vorwurf des leeren Formalismus eingetragen hat — oder aber bei der Behandlung wirklicher Probleme es an der unbedingt notwendigen Gediegenheit fehlen zu lassen, womit der größte Teil des hohen erzieherischen Wertes dieses Unterrichts zwangläufig verloren geht.« Hierzu wäre allenfalls zu bemerken, daß in Oesterreich, wo die Zahl der Mathematikstunden in den Gymnasien durchwegs drei beträgt, nicht nur die mathematische Allgemeinbildung eine befriedigende ist, sondern auch ein erheblicher Teil der späteren Ingenieure vom Gymnasium herkommt, ohne jeden Zeitverlust an die Hochschule übergeht und hier das geschätzteste Schülermaterial bildet.

Die ministerielle Denkschrift sieht vor, daß die vier zurzeit bestehenden Schultypen, Gymnasium, Real-Gymnasium, Realschule und Deutsche Oberschule, sämtlich erhalten bleiben. Man hat allgemein das Empfinden, daß vier Gattungen höherer Schulen etwas zu viel seien. Aber in allen Erörterungen wird das Bestehenbleiben der drei älteren Typen gar nicht in Frage gestellt und die fast überall vorhandene Abneigung gegen die Deutsche Oberschule verdichtet sich nur selten zu ausgesprochener Ablehnung. Selbst in einer von Mathematikern und Schulmännern besuchten Abteilungssitzung auf dem Innsbrucker Naturforschertag drang eine Anregung, sich grundsätzlich gegen die Deutsche Oberschule auszusprechen, nicht durch und man konnte sich nur auf die Formel einigen, daß die Zahl der Schultypen »möglichst beschränkt« werden soll.

Ist nun einmal an der Vierzahl der Schulgattungen nichts zu ändern, so bleiben zwei Möglichkeiten der weiteren Durchführung und Ausgestaltung. Man kann entweder — und dies ist der Weg, den das Ministerium geht — jeder einzelnen Schultype eine scharf ausgeprägte Eigenart geben, ihr ein bestimmt umgrenztes Bildungsziel vorschreiben, oder man kann versuchen, die historisch gewordenen Unterschiede möglichst abzuschleifen und im Unterrichtsplan und Bildungsziel die vier Schulgattungen einander anzunähern. Offenbar lassen sich für und wider jeden dieser beiden Wege zahlreiche Argumente anführen. Felix Klein hat sich in früheren Jahren für die Forderung einer »spezifischen Allgemeinbildung« ausgesprochen, d. h. einer Bildung, die je nach der Veranlagung des einzelnen in der einen oder andern Richtung konzentriert ist, er ist aber auf Grund späterer Erfahrungen dahin gelangt, einem Ausgleich der verschiedenen Schulrichtungen das Wort zu reden. Die ministerielle Denkschrift weist dem Gymnasium die Pflege der alten Sprachen und damit der Altertumswissenschaft in erster Linie zu, dem Realgymnasium die Pflege der neueren Sprachen (das somit in mathematisch-naturwissenschaftlicher Hinsicht dem Gymnasium gleichgestellt wird), während in der Realschule die mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildungsfächer, in der Deutschen Oberschule die Deutschkunde vorwiegend gepflegt werden sollen. Die Gegner wenden vor allem ein, daß durch diese Gestaltung der Lehrpläne die Berufswahl auf einen sehr frühen Zeitpunkt verlegt und der Uebergang von einer Schule zur andern sehr erschwert würde. Der verständlichste Einwand rührt von jenen Vertretern realistischer Berufe her, die im Grunde genommen Anhänger des humanistischen Gymnasiums sind und gehofft hatten, es würde sich mit der Zeit ein Ausgleich zwischen den Grundlagen humanistischer Bildung und den späteren Berufsanforderungen finden lassen; ihnen schwebt als Ideal ein altsprachliches Gymnasium mit vermehrtem mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht vor[1]). Das Ministerium steht demgegenüber auf dem Standpunkt, daß die Schule nicht einen Teil der eigentlichen Berufsvorbereitung zu leisten habe und daß sich bestimmte Fachkenntnisse leicht später aneignen lassen.

Ein wesentlicher Grundgedanke der ministeriellen Schulreform ist die Teilung des Unterrichtsstoffes in kulturkundliche und in Spezialfächer. Zu den ersteren gehören Deutsch, Religion, Philosophie, Geschichte und Geographie, zu den letzteren die Sprachen, Mathematik und Naturwissenschaften. Den kulturkundlichen Fächern soll nach der Absicht der Reform eine dreifache Aufgabe zufallen. Sie sollen einmal in jeder Schulgattung deren besondere Eigenart durch zusammenfassende Betrachtung der bevorzugten Lehrgegenstände vertiefen, sie sollen zweitens den Anschluß an die im Spezialunterricht weniger berücksichtigten Bildungsinhalte, die den anderen Schulgattungen zugewiesen sind, herstellen, und sie sollen schließlich dadurch, daß der Deutsch-Unterricht in den Mittelpunkt gestellt ist, den einheitlichen nationalen Charakter aller Schulen gewährleisten. Gegen die Abgrenzung und gegen die Betonung der kulturkundlichen Fächer sind von mathematischer und technischer Seite die verschiedensten Einwände erhoben worden. Der Mathematische Reichsverband will einfach die Mathematik in die Kulturkunde einbeziehen: »Mathematik gehört nebst Deutsch zur spezifisch deutschen Kulturkunde und kann nicht in Parallele zu den Sprachen gesetzt werden«. Die Notwendigkeit mathematischer Bildung als Grundlage für die Erfassung der mo-

[1]) **Vergl. G. Lippart in den VDI-Nachrichten vom 27. August 1924.**

dernen Kultur wird in der Denkschrift des Reichsverbandes durch folgende Sätze, die kaum die Zustimmung vieler Fachleute finden dürften, begründet: »Es gibt doch gewiß zu denken, daß ein Buch von so weiter Verbreitung und so starker Wirkung wie Oswald Spenglers Untergang des Abendlandes — zu dessen Folgerungen man übrigens stehen mag wie man will — sich ganz grundsätzlich auf mathematischer Grundlage aufbaut« und »Daß schon die Grundgedanken der speziellen Relativitätstheorie der Allgemeinheit der Gebildeten so große Schwierigkeiten bereiten, zeigt, wie notwendig mathematische Schulung für alle Gebildeten ist«. In ganz anderer Richtung liegen die Einwände, die in erster Linie vom Hochschulverband ausgehen und die hauptsächlich die Bevorzugung der kulturkundlichen Fächer bekämpfen. Man erblickt darin eine Verweichlichung der Jugend, eine Abwendung von ernster realer Arbeit, eine Betonung gefühlsmäßiger statt verstandesmäßiger Einstellung gegenüber der Außenwelt. Die tatsächliche Vermehrung der Stundenzahl in den kulturkundlichen Fächern ist allerdings kaum nennenswert; sie beträgt im Gymnasium 6 vH, in der Realschule 3 vH der gesamten Stundenzahl. Für die von den Ingenieuren seit langem angestrebte Berücksichtigung technischer Kulturelemente im Schulunterricht würde sich im Rahmen der kulturkundlichen Fächer wohl die passendste Gelegenheit finden. Es ist doch eine Illusion, zu glauben, daß durch ein Mehr an mathematischem Unterrichtsstoff oder an mathematischer Stundenzahl dem Schüler das Verständnis für die technischen Leistungen der Gegenwart näher gebracht werden kann. Dagegen müßte, wenn anders der Sinn der Schulreform richtig erfüllt werden soll, der kulturkundliche Unterricht in der Realschule von dem Gedankenkreis neuzeitlicher Technik ausgehen und in den anderen Schulgattungen von anderer Seite her auf ihn hinführen. Jedenfalls liegt hier eine Aufgabe vor, bei der positive Mitarbeit der Ingenieurkreise von größtem Wert für die Schule werden könnte.

In allen Kundgebungen, mögen sie von wem immer herrühren, tritt die Beschwerde darüber auf, daß das Ministerium nicht von allem Anfang an sich mit den Fachleuten in Verbindung gesetzt habe. Zwar nimmt die ministerielle Denkschrift auf zahlreiche Aeußerungen fast aller bekannter deutscher Pädagogen Bezug, doch scheint es, als ob hier wirklich versäumt worden wäre, dem Zug der Zeit entsprechend, möglichst weiten Kreisen zur Meinungsäußerung Gelegenheit zu geben. Daß an dem schließlichen Ergebnis sich viel geändert hätte, wird niemand annehmen, der die vielfach sich widersprechenden Ansichten der einzelnen Berufskreise übersieht. Die scheinbar weitgehende Uebereinstimmung in der Kritik bietet keine Gewähr für Einigung im Positiven. Am Ende wird man sich doch darauf besinnen müssen, daß jede Entscheidung etwas Einseitiges hat und daß vielleicht auch bei einem preußischen Minister, der selbst aus dem Schulberuf hervorgegangen ist und der politisch einer durchaus gemäßigten Partei angehört, etwas von dem Sachverständnis zu finden sein könnte, über das alle »zuständigen« und »maßgebenden« Kreise so reichlich verfügen. Damit soll gewiß nicht die Berechtigung und vor allem der reale Nutzen verständiger und gemessener Kritik bestritten, sondern nur das laute Uebermaß der Uebertreibungen getroffen werden. Es ist nun zu hoffen, zumal der Minister neuerdings in verschiedenen Punkten berechtigten Wünschen Entgegenkommen gezeigt hat, daß endlich eine Beruhigung eintritt und der Schule die Möglichkeit gegeben wird, sich zum Nutzen der deutschen Zukunft auszuwirken. Mises. 466

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Bericht über die zweite Jahres-Versammlung in Innsbruck am 25. und 26. September 1924. Im Rahmen der 88. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte hat in Innsbruck unter zahlreicher Beteiligung der Mitglieder die zweite Jahresversammlung der Gesellschaft stattgefunden. In drei wissenschaftlichen Sitzungen, von denen die zweite gemeinschaftlich mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Deutschen Physikalischen Gesellschaft abgehalten wurde, sind im ganzen 19 Vorträge gehalten worden. Im folgenden geben wir kurzen Bericht über diese und die Geschäftssitzung der Gesellschaft.

Erste Sitzung. Donnerstag, den 25. September nachmittags.

Vorsitzender: v. Mises-Berlin.

1. R. Mehmke-Stuttgart: Ueber neue Anwendungen von Brauers logarithmischem Zirkel. — Aussprache: Winkelmann.
2. P. Riebesell-Hamburg: Die Bedeutung der mathematischen Statistik für neuere Formen der Feuerversicherung. — Aussprache: Blaschke-Wien.
3. E. J. Gumbel-Heidelberg: Untersuchungen zur Theorie der Sterbetafeln. — Aussprache: Blaschke-Wien, Böhmer, Riebesell.
4. P. Böhmer-Dresden: Ueber Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Aussprache: v. Mises.

Geschäftssitzung. Donnerstag, den 25. September nachmittags.

Vorsitzender: Reißner-Berlin.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, den die Gesellschaft durch den Tod von Prof. Wieghardt-Dresden erlitten hat. Hierauf erstattet Hr. v. Mises den Geschäftsbericht: die Mitgliederzahl ist auf 185 gestiegen, 108 Mitglieder wohnen im Deutschen Reich, die übrigen verteilen sich auf 11 verschiedene Länder. Da das Geschäftsjahr noch zum Teil in die Inflationsperiode fiel, gibt die Summe der Einnahmen und Ausgaben kein vernünftiges Bild. Der Kassenbestand beträgt zur Zeit der Berichterstattung 76 Goldmark. Es wird beschlossen, für das neue Geschäftsjahr den Mitgliedsbeitrag für in- und ausländische Mitglieder einheitlich auf 2 Goldmark festzusetzen. Die Ernennung von Felix Klein zum Ehrenmitglied der Ge-

sellschaft aus Anlaß seines 75. Geburtstages wird gutgeheißen.

Auf Antrag von Hrn. Reißner beschließt die Versammlung einstimmig, in die Satzungen folgenden Paragraphen einzufügen: »Die in einem Orte oder in einem Bezirk wohnenden Mitglieder können sich zum Zweck regelmäßiger Abhaltung wissenschaftlicher Veranstaltungen zu einer Gruppe zusammenschließen. Die Bildung einer Gruppe bedarf der Genehmigung durch den Vorstand; der Antrag hierzu muß von mindestens zehn Mitgliedern, die der Gruppe beizutreten wünschen, gestellt werden«. Die durch diesen Zusatz ergänzten Satzungen sollen zur Eintragung ins Vereinsregister vorgelegt werden. Der Vorstand wird ausdrücklich ermächtigt, etwaige vom Registerrichter verlangte Aenderungen vorzunehmen.

Auf Antrag von Hrn. v. Mises wird beschlossen, die nächste Jahresversammlung in Danzig gemeinsam mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Deutschen Physikalischen Gesellschaft abzuhalten. Außerdem soll eine kleine Zwischentagung in Dresden im Laufe des Wintersemesters eingeschaltet werden; hierbei sollen an einem Tage wissenschaftliche Vorträge oder Diskussionen über ein bestimmtes Thema (voraussichtlich die Plastizitätstheorie) stattfinden, an die sich dann eine zwanglose Zusammenkunft anschließt. Hr. Trefftz wird die Vorbereitung dieser Tagung in die Hand nehmen.

Zu Kassenrevisoren werden Hr. Trefftz-Dresden und Hr. Eisner-Berlin gewählt.

Zweite Sitzung. Freitag, den 26. September vormittags (gemeinsam mit den Mathematikern und Physikern).

Vorsitzender: Planck-Berlin.

1. H. Daecke-Hamburg: Mathematisch-statistische Untersuchungen über die Subelektronen. — Aussprache: Edgar Meyer-Zürich, Ehrenhaft, v. Mises, Reißner.
2. R. Courant-Göttingen: Neuere Methoden der Variationsrechnung und Randwertaufgaben. — Aussprache: Hahn, Funk.
3. H. Wagner-Berlin: Ueber die Entstehung des Tragflügelauftriebes.
4. E. Waelsch-Brünn: Polrechnung, Kristalldynamik und Kristallsysteme.
5. Zinner-München: Die Sternforschung in Oesterreich während des 15. Jahrhunderts. — Aussprache: Archenhold.
6. Gawronsky-Bern: Ein neuer Beweis der Lorentz-Transformation.

Dritte Sitzung. Freitag, den 26. September nachmittags.

Vorsitzender: Grübler-Dresden.

1. W. Lorey-Leipzig: Was versteht man unter mathematischer Statistik?
2. E. Melan-Prag: Anwendung partieller Differenzengleichungen zur Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme. — Aussprache: Reißner, Ratzersdorfer, v. Mises.
3. P. Funk-Prag: Stabilität der eingespannten Elastika. — Aussprache: v. Mises.
4. H. Alt-Dresden: Einige technisch wichtige Fragestellungen über die Totlagen des Gelenkvierecks.
5. E. Schwerin-Berlin: Die Stabilität rotierender axial belasteter Wellen. — Aussprache: v. Mises, Wagner, Grübler.

Von den Vorträgen wird ein Teil in dieser Zeitschrift erscheinen.

Mathematischer Reichsverband. Der mathematische Reichsverband hielt gemeinschaftlich mit den Abteilungen 1 und 15 des Naturforschertages am Montag, den 22. September seine Jahresversammlung ab. Unter Vorsitz von Hrn. v. Dyck-München hielten die Hrn. Winderlich-Oldenburg und K. Körner-Gronau i/W. Vorträge über Gegenstände, die mit der Reform der höheren Schulen zusammenhängen. Hr. Hamel berichtete über die Tätigkeit des Arbeitsausschusses. Eine vom Deutschen Ausschuß für mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht vorbereitete Entschließung zur Neuordnung des höheren Schulwesens in Preußen wurde zurückgezogen und statt dessen ein kleiner Ausschuß mit dem Auftrag gewählt, eine kürzere und allgemeiner gefaßte Resolution zu verfassen und der Geschäftssitzung der Naturforscherversammlung vorzulegen. (Die Entschließung, die von der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte am 24. September angenommen wurde, ist in den VDI-Nachrichten vom 15. Oktober im Wortlaut veröffentlicht.) In der darauffolgenden geschäftlichen Sitzung des Reichsverbandes unter Vorsitz von Hrn. Hamel wurde ein Entwurf für die Prüfungsordnung der Studienreferendare, der ein Kompromiß zwischen den auf der Leipziger Tagung zum Ausdruck gekommenen gegensätzlichen Auffassungen[1]) darstellt, angenommen. 467

Verhandlungen des Delfter Mechanik-Kongresses. Dem in der Schlußsitzung gefaßten Beschluß entsprechend gibt das ausführende Komitee einen Verhandlungsbericht, der die auf dem Kongreß gehaltenen Vorträge und Diskussionen umfaßt, heraus. Der stattliche Band von etwa 370 S. mit 300 Figuren kostet in Subskription 13 holl. fl. (d. s. ca. 23 M), im Buchhandel 18 fl. (ca. 33 M). Der Subskriptionspreis gilt für diejenigen, die bis zum 8. November ihre Bestellung und den Betrag an Herrn Prof. Ir. C. B. Biezeno, Delft (Holland), Nieuwelaan 76 eingesandt haben. Es ist zu hoffen, daß die Nachfrage nach dem Verhandlungsbericht dem großen Interesse, das der Kongreß selbst gefunden hat, entsprechen wird.

[1]) Vergl. diese Zeitschr. 2, 1922, S. 405/406.

(Redaktionsschluß 21. Oktober 1924.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil Fritz Noack, Berlin-Niederschönhausen.
VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin. — Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.